

Finanzderivate und Risikomanagement
Sommersemester 2021
Dr. Christoph Hambel
Übungsblatt 5

1. Zinssätze und Bonds

- (a) Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen dem Forwardzinssatz $f_t(\tau, T)$ und dem Kassazinssatz. Welcher Zusammenhang muss zwischen beiden Zinssätzen gelten, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen?

Lösung: Kassazinssatz $y_t(T)$ ist Zinssatz für ein Investment in t bis T , das in t abgeschlossen wird. Forwardzinssatz $f_t(\tau, T)$ gilt für ein Investment, das in τ beginnt und bis T läuft, jedoch schon in t abgeschlossen wurde.

Es muss gelten:

$$1 + y_t(T) = (1 + y_t(\tau))(1 + f_t(\tau, T))$$

- (b) Was versteht man unter Zinsunsicherheit? Was können Sie über Zinsunsicherheit sagen, wenn die Zinsstrukturkurve flach ist?

Lösung: Im Allgemeinen sind zukünftige Spot Rates ungleich heutigen Forwardrates.

Eine flache Zinsstrukturkurve sagt nichts über die Zinsunsicherheit aus.

- (c) Erklären Sie kurz die Begriffe Zinsstrukturkurve und yield curve. Wann sind diese gleich?

Lösung: Die Zinsstrukturkurve ordnet jedem Zeitpunkt T den Kassazinssatz $y_t(T)$ zu. Die yield curve ordnet jedem Zeitpunkt T die internal rate of return eines Bonds mit Fälligkeit T zu. Diese sind gleich, wenn die yield curve ausschließlich aus Zero-Bonds berechnet wurde.

- (d) Was können Sie über einen Coupon-Bond sagen, dessen Coupon der Swap Rate entspricht? **Lösung:** Der Preis des Bonds wäre sein Nominalbetrag.

2. Swaps

- (a) Bestimmen Sie die Swaprate $c_0(T)$ für einen Zinsswap mit Fälligkeit in T so dass der Wert des Swaps in $t = 0$ gleich null ist. Erklären Sie Ihren Ansatz.

Lösung: Der Swap kann aus einem Austausch von Coupon-Bond und FRN repliziert werden. Der Floater wird zu seinem Nominalbetrag N gehandelt. Der Coupon-Bond hat den Preis $Nc_0(T) \sum_{t=1}^T B_0(t) + NB_0(T)$. Gleichsetzen beider Terme liefert

$$c_0(T) = \frac{1 - B_0(T)}{\sum_{t=1}^T B_0(t)}.$$

- (b) Bestimmen Sie den Wert eines Payer-Swaps in τ zwischen 0 und T . Erklären Sie Ihren Ansatz. Was ist der Wert des Receiver Swaps?

Lösung: Gemäß des LOP entspricht der Wert des Payer-Swaps einem Portfolio aus Coupon-Bond long und FRN short. Damit erhält man den Wert des Payer-Swaps

$$1 - \left(c_0(T) \sum_{t=\tau+1}^T B_\tau(t) + B_\tau(T) \right).$$

Der Wert des Receiver Swaps ist offensichtlich der negative Wert des Payer-Swaps.

- (c) Nehmen Sie an, die Zinsstrukturkurve sei gegeben durch $y_0(1) = 0.04$, $y_0(2) = 0.045$, and $y_0(3) = 0.05$. Berechnen Sie die Zweijahres- und Dreijahresswaprate. Was können Sie – ohne Berechnung – über den Preis eines zweijährigen Bonds mit einem Coupon von 5% sagen?

Lösung: Die Swap-Rate ist gegeben durch

$$c_0(T) = \frac{1 - B_0(T)}{\sum_{t=1}^T B_0(t)}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} B_0(1) &= e^{-0.04 \cdot 1} \\ &= 0.9608 \\ B_0(2) &= e^{-0.045 \cdot 2} \\ &= 0.9139 \\ B_0(3) &= e^{-0.05 \cdot 3} \\ &= 0.8607. \end{aligned}$$

Und wir erhalten für die Swapprates

$$\begin{aligned}c_0(2) &= \frac{1 - B_0(2)}{B_0(1) + B_0(2)} \\ &= 0.0459 \\ c_0(3) &= \frac{1 - B_0(3)}{B_0(1) + B_0(2) + B_0(3)} \\ &= 0.0509.\end{aligned}$$

Der 5%-Bond mit $T = 2$ hat eine Coupon-Rate, die höher liegt als die Par-Swap-Rate. Damit muss dessen Preis über seinem Nominalbetrag liegen ($P = 100.77$).

3. Caps und Floors

- (a) Zeigen Sie, dass der Wert eines Caps gleich dem Wert eines Portfolios von Put-Optionen auf Zero-Bonds ist. Nehmen Sie dazu an, der Cap habe Payoffs in $\{t_1, \dots, t_N\}$ und die Zahlung in t_i sei $\max\{[L_{t_{i-1}}(t_{i-1}, t_i) - L_C]\Delta t, 0\}$.

Lösung: Der Wert der Zahlungen in t_i ist bereits in t_{i-1} bekannt und deren Wert in t_{i-1} ist:

$$\begin{aligned}& B_{t_{i-1}}(t_i) \max\{[L_{t_{i-1}}(t_{i-1}, t_i) - L_C]\Delta t, 0\} \\ &= B_{t_{i-1}}(t_i) \max\{1 + L_{t_{i-1}}(t_{i-1}, t_i)\Delta t - 1 - L_C\Delta t, 0\} \\ &= B_{t_{i-1}}(t_i) \max\{B_{t_{i-1}}(t_i)^{-1} - (1 + L_C\Delta t), 0\} \\ &= (1 + L_C\Delta t) \max\left\{\frac{1}{1 + L_C\Delta t} - B_{t_{i-1}}(t_i), 0\right\}\end{aligned}$$

- (b) Nehmen Sie an, Sie kaufen eine FRN und möchten sich gegen das Zinsänderungsrisiko absichern. Insbesondere möchten Sie eine Absicherung gegen den Fall, dass der Zins unter 1% fällt. Wie würden Sie vorgehen? Was würden Sie tun, wenn Sie der Emittent des Bond wären und sich gegen einen Zinsanstieg über 3% absichern möchten?

Lösung: Der Käufer könnte sich mit einem Floor mit Strike-Rate von 1% absichern, wobei die Zahlungstermine des Floors mit den Coupon-Terminen des Bonds übereinstimmen müssen. Der Emittent sollte einen Cap mit Strike-Rate von 3% abschließen.

- (c) Da der Cap teuer ist, möchte der Emittent seine Kosten reduzieren, jedoch trotzdem den Zinsanstieg nach oben begrenzen. Nennen Sie hierzu eine geeignete Strategie und benennen Sie einen Nachteil.

Lösung: Der Emittent könnte einen Collar kaufen, d.h. einen Cap long und einen Floor short. Durch den Verkauf des Floors reduziert er die Kosten der Absicherung, jedoch gibt er damit die Chance auf von fallenden Zinsen unterhalb der Strike-Rate L_F zu profitieren.

4. Ho-Lee-Modell

Nehmen Sie an, die Diskontfunktion ist gegeben durch $B_0(T) = e^{-(0.04+0.01 \cdot T) \cdot T}$ für $T = 1, 2, 3$. Sei $\pi = 0.5$ und $\delta = 0.97$.

- (a) Um welchen Typ von Zinsstruktur handelt es sich? Geben Sie eine Modifikation an, so dass eine inverse Zinsstruktur entsteht.

Lösung: Normale Zinsstruktur. Eine fallende Zinsstruktur lässt sich etwa ausdrücken durch $B_0(T) = e^{-(0.04-0.01 \cdot T) \cdot T}$.

- (b) Bestimmen Sie den Baum der Diskontfunktion $t = 0, 1, 2$.

Lösung: Bestimme die Funktionen $h(\tau) = \frac{1}{q+(1-q)\delta^\tau}$ und $h^*(\tau) = h(\tau)\delta^\tau$:

τ	1	2
$h(\tau)$	1.01052	1.03045
$h^*(\tau)$	0.984677	0.96955

Die anfängliche Diskontkurve ist:

$$\begin{aligned}
 B_0(1) &= e^{-0.05 \cdot 1} \\
 &= 0.9512 \\
 B_0(2) &= e^{-0.06 \cdot 2} \\
 &= 0.8869 \\
 B_0(3) &= e^{-0.07 \cdot 3} \\
 &= 0.8106.
 \end{aligned}$$

Für $t = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 B_1^{(1)}(2) &= \frac{B_0(2)}{B_0(1)} h(1) \\
 &= \frac{0.8869}{0.9512} 1.01052 \\
 &= 0.9466 \\
 B_1^{(1)}(3) &= \frac{B_0(3)}{B_0(1)} h(2) \\
 &= \frac{0.8106}{0.9512} 1.03004 \\
 &= 0.8781 \\
 B_1^{(0)}(2) &= \frac{B_0(2)}{B_0(1)} h^*(1) \\
 &= \frac{0.8869}{0.9512} 0.985 \\
 &= 0.9182 \\
 B_1^{(0)}(3) &= \frac{B_0(3)}{B_0(1)} h^*(2) \\
 &= \frac{0.8106}{0.9512} 0.970 \\
 &= 0.8262,
 \end{aligned}$$

... und für $t = 2$:

$$\begin{aligned}
 B_2^{(2)}(3) &= \frac{B_1^{(1)}(3)}{B_1^{(1)}(2)} h(1) \\
 &= 0.9418 \\
 B_2^{(1)}(3) &= \frac{B_1^{(1)}(3)}{B_1^{(1)}(2)} h^*(1) \\
 &= 0.9135 \\
 B_2^{(0)}(3) &= \frac{B_1^{(0)}(3)}{B_1^{(0)}(2)} h^*(1) \\
 &= 0.8861.
 \end{aligned}$$

- (c) Nehmen Sie Stellung zu der folgenden Aussagen: Im Ho-Lee Modell entspricht der Preis eines Coupon-Bonds nicht notwendigerweise dem Preis des ihn replizierenden Portfolios aus Zero-Bonds.

Lösung: Diese Aussage ist offensichtlich falsch, da das Ho-Lee Modell arbitragefrei ist und daher das LOP gilt.

- (d) Berechnen Sie die Zweijahres-Swaprate in $t = 0$. Was ist der Wert dieses Swaps in $t = 1$ nach einem Anstieg der Diskontfunktion?

Lösung: Die Zweijahres-Swaprate in $t = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}c_0(2) &= \frac{1 - B_0(2)}{B_0(1) + B_0(2)} \\ &= 0.0615.\end{aligned}$$

In $t = 1$ ist der Wert des Payer-Swap gleich der Differenz aus den Preisen von FRN und Coupon-Bond.

Der Preis des Coupon-Bonds ist gleich

$$\begin{aligned}V_{1,out}^{(1)} &= B_1^{(1)}(2) (1 + c_0(2)) \\ &= 0.9466 \cdot (1 + 0.0615) \\ &= 1.0048.\end{aligned}$$

während der Wert des Floaters offensichtlich $V_{1,in}^{(1)} = 1$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}V_{1,in}^{(1)} - V_{1,out}^{(1)} &= 1 - 1.0048 \\ &= -0.0048.\end{aligned}$$

5. Ausfallrisiken

Betrachten Sie eine Firma mit einem Assets in Höhe von EUR 10 Millionen. Die Firma ist finanziert durch Eigenkapital und einem Zero-Coupon Bond mit Nominalbetrag EUR 9 Millionen, der in zwei Jahren fällig wird. Die Volatilität der Assets beträgt 10% und der risikofreie Zins beträgt 2% bei einer flachen Zinsstruktur und stetiger Verzinsung.

- (a) Bewerten Sie EK und FK in einem Einperiodenmodell (d.h. $\Delta t = 2$) mit Hilfe der CRR-Spezifikation. Wie sieht die Kapitalstruktur des Unternehmens aus?

Lösung: Mit den vorgegebenen Parametern erhält man

$$\begin{aligned}u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1 \\&= e^{0.1\sqrt{2}} - 1 \\&= 0.1519 \\d &= e^{-0.1\sqrt{2}} - 1 \\&= -0.1329 \\e^{r\Delta t} &= e^{0.02 \cdot 2} \\&= 1.0408 \\q &= \frac{e^{r\Delta t} - d - 1}{u - d} \\&= 0.6085.\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die folgenden Unternehmenswerte im Up-State $10 \cdot 1.1519 = 11.519$ und im Down-State: 8.681. Das Auszahlungsprofil des EK ist $\max\{V - F, 0\}$. Damit ergibt sich für den Up-State $E_1^u = 11.519 - 9 = 2.519$ und für den Down-State $E_1^d = 0$. Risikoneutrale Bewertung liefert

$$\begin{aligned}E_0 &= e^{-r\Delta t} (q \cdot E_1^u + (1 - q) \cdot E_1^d) \\&= e^{-0.02 \cdot 2} (0.6085 \cdot 2.519 + (1 - 0.6085) \cdot 0) \\&= 1.473.\end{aligned}$$

Der Kapitalmarkt ist vollständig. Daher gilt nach Modigliani-Miller:

$$\begin{aligned}D_0 &= V_0 - E_0 \\&= 10 - 1.473 \\&= 8.527.\end{aligned}$$

Daraus folgt eine Kapitalstruktur von 85.27% FK und 14.73% EK, was einem Leverage von $\ell_0 = D_0/E_0 = 5.79$ entspricht.

(b) Wiederholen Sie die Bewertung im Merton-Modell

Lösung: Nun gilt

$$E_0 = V_0\Phi(d_1) - Fe^{-rT}\Phi(d_2)$$

with

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln(V_0/F) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}.\end{aligned}$$

Mit den Zahlen:

$$\begin{aligned}d_1 &= 1.099 \\d_2 &= 0.957,\end{aligned}$$

insofern

$$\begin{aligned}E_0 &= 10 \cdot 0.864 - 9 \cdot e^{-0.02 \cdot 2} \cdot 0.831 \\&= 1.457 \\D_0 &= 8.543\end{aligned}$$

mit einem Hebel von $\ell = 5.865$.

6. Ausfallrisiken

Der Wert einer Firma beträgt 100,000,000 Euro. Die Volatilität der Assets beträgt $\sigma = 0.1$, und die Firma ist finanziert aus EK und einem Zero-Bond mit Nominalbetrag 90,000,000 Euro, der in zehn Jahren fällig wird. Der risikofreie Zins betrage $r = 3.5\%$. Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für den yield-Spread zwischen Corporate Bond und Treasury Bond und bestimmen Sie diesen im Merton-Modell.

Lösung: Das Merton-Modell liefert $E_0 = 37.416$, $D_0 = 62.584$, $\ell = 1.6727$. Die Rendite des Treasury Bonds ist offensichtlich der risikofreie Zins. Die Rendite des Corporate Bonds y_D ist

$$\begin{aligned}D_0 &\stackrel{!}{=} F \cdot e^{-y_D \cdot T} \\ \Rightarrow y_D &= -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{D_0}{F} \right),\end{aligned}$$

so dass der Spread gegeben ist durch

$$y_D - r = -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{D_0}{F} \right) - r.$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}y_D &= -\frac{1}{10} \ln \left(\frac{64.656}{90} \right) \\ &= 0.0363\end{aligned}$$

d.h. $y_D - r = 0.0013$.

Zusatzfrage: Welchen Verlauf erwarten Sie für den yield-spread in Abhängigkeit der (i) Asset Volatilität σ ; (ii) Nominalbetrag des Bonds bei ansonsten gleichen Parametern?

Lösung: Yield-Spread wächst monoton in σ und F .