Finanzderivate und Risikomanagement
Sommersemester 2021
Dr. Christoph Hambel
Übungsblatt 4

1. Sie erhalten eine unvollständige Tabelle mit Daten bezüglich einer Optionsposition einer Bank. Alle Optionen beziehen haben den gleichen Rohstoff als Basiswert. Sie wissen, dass der aktuelle Preis dieses Rohstoffs 100 und der risikofreie Zins 5% beträgt. Alle Optionen haben einen Strike-Preis von 100 und eine Fälligkeit in einem Jahr. Ermitteln Sie die fehlenden Werte in dieser Tabelle.

Position	# Kontrakte	Typ	Strike	Preis	Delta	Gamma	Vega
short	100	Call	100	-1045.06	-63.68		-3752.40
short	300	Put	100				
long	75	Call	90			1.02	2037.19
Portfolio				-1464.66	106.00	-6.49	-12972.42

Lösung: Der Wert der Puts mit Strike 100 kann über die Put-Call-Parität bestimmt werden. Der Preis eines Calls ist $C_0 = -1045.06/(-100) = 10.45$, so dass

$$P_0 = 10.45 - 100 + 100e^{-0.05} = 5.57.$$

Die Position von 300 Puts short kostet daher -1672.06. Der Wert der Long-Call-Position ergibt sich aus dem Gesamtwert des Portfolios.

Aus der Put-Call-Parität folgt für das Optionsdelta $\Delta_{P,100} = \Delta_{C,100} - 1$. Damit erhält man für das Delta der 300 Short Puts, $y = -300\Delta_{P,100}$:

$$\frac{y}{300} - 1 = -\frac{63.68}{300}$$

d.h. $y = 108.96$. Das Delta der Callposition mit Strike 90 ergibt sich dann aus dem Portfoliowert und ist gleich 60.72.

Für die Gammas von Puts und Calls mit gleichem Strike und gleicher Restlaufzeit gilt $\Gamma_C = \Gamma_P$, so dass

$$\begin{aligned} -100\Gamma_{C,100} - 300\Gamma_{P,100} + 1.02 &= -6.49 \\ \Rightarrow -400\Gamma_{C,100} &= -7.51 \\ \Rightarrow \Gamma_{C,100} &= 0.01877. \end{aligned}$$

Multipliziert man dieses Ergebnis mit -100 bzw. -300 erhält man die Gammas der jeweiligen Position.

Das Vega errechnet sich direkt aus dem Portfoliowert:

$$\begin{aligned} -3752.4 + x + 2037.19 &= -12972.42 \\ \Rightarrow x &= -11257.21. \end{aligned}$$

Position	# Kontrakte	Typ	Strike	Preis	Delta	Gamma	Vega
short	100	Call	100	-1045.06	-63.68	-1.88	-3752.40
short	300	Put	100	-1672.06	108.96	-5.64	-11257.21
long	75	Call	90	1252.46	60.72	1.02	2037.19
Portfolio				-1464.66	106.00	-6.49	-12972.42

2. Betrachten Sie eine Europäische Call-Option auf eine Aktie mit $S = 20$, $K = 15$, $r = 0.02$, $\sigma = 0.3$ und Fälligkeit in 3 Monaten. Der nächste Dividendentermin ist in sechs Monaten und es wird eine Dividende von 0,5 erwartet.

   (a) Berechnen Sie den Preis dieser Option.

   Lösung: Siehe Excel-Sheet. $C_0 = 5.10$

   (b) Bestimmen und interpretieren Sie das Options-Delta. Erläutern Sie die Analogie zum Binomialmodell. Erzeugen Sie in Excel einen Plot von Δ_C zwischen $S_0 = 0$ und $S_0 = 40$.

   Lösung: Siehe Excel-Sheet.

   $\Delta = N(d_1) = 0.97863$. Δ beschreibt die Anzahl der Aktien im Replikationsportfolio und ist die partielle Ableitung des Optionspreises bezüglich des Aktienkurses. Im Binomialmodell ist Δ gegeben als das Verhältnis der möglichen Optionspreise zu den möglichen Aktienkursen in der nachfolgenden Periode. Im Grenzwert, d.h. für $N \to \infty$ erhält man die partielle Ableitung des Optionspreises bezüglich des Aktienkurses.

3. Betrachten Sie eine Call-Option auf eine Aktie. Nehmen Sie an, dass der aktuelle Aktienkurs 42 betrage und die Option in sechs Monaten fällig werde. Der Zinssatz betrage 1% und die Dividendenrendite 2%. Sie beobachten einen Marktpreis der Option von 5,12. Implementieren Sie eine kurze Prozedur zur Berechnung der impliziten Volatilität in Excel. Erklären Sie warum, die implizite Volatilität eindeutig bestimmt werden kann.

Lösung: Siehe Excel-Sheet.

Der Optionspreis wächst monoton in der Volatilität (Vega ist immer positiv, unabhängig von anderen Faktoren).