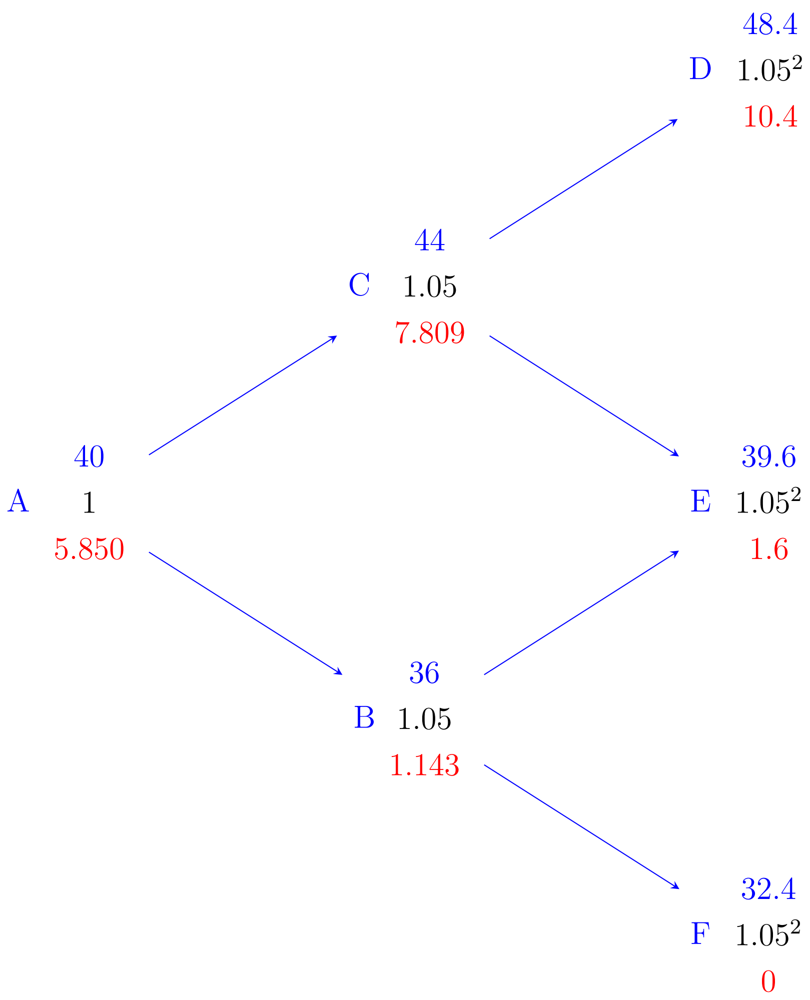
Finanzderivate und Risikomanagement
Sommersemester 2021
Dr. Christoph Hambel
Übungsblatt 3

1. Betrachten Sie ein zweiperiodiges Binomialmodell mit den folgenden Parametern $S_0 = 40$, $u = 0.1$, $d = -0.1$ und $r = 0.05$.

   (a) Zeichnen Sie einen Binomialbaum für den Aktienkurs und eine Call-Option mit Strike-Preis $K = 38$.

   Lösung:

Abbildung 1: Binomial tree



(b) Bewerten Sie die Option aus (a) mit Hilfe der Optionspreisformel und bestimmen Sie den Preis einer Put-Option mit ansonsten gleichen Eigenschaften.

Lösung: Aus dem Baumdiagramm wird ersichtlich, dass die minimale Anzahl erforderlicher Kursanstiege $a = 1$ ist. Es gilt, $q = (0.05 + 0.1)/(0.1 + 0.1) = 0.75$ und $\widetilde{q} = q(1 + u)/(1 + r) = 0.75 \cdot 1.1/1.05 = 0.7857$. Die Anwendung der Optionspreisformel ergibt:

$$\begin{aligned} C_0 &= 40 \cdot \sum_{i=1}^{2} \binom{2}{i} 0.7857^i (1 - 0.7857)^{2-i} - 38 \cdot 1.05^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{2} \binom{2}{i} 0.75^i (1 - 0.75)^{2-i} \\ &= 40 \left(2 \cdot 0.7857 \cdot 0.2143 + 0.7857^2\right) - 38 \cdot 1.05^{-2} \cdot \left(2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 + 0.75^2\right) \\ &= 5.850 \end{aligned}$$

Mit der Put-Call-Parität erhalten wir für die Europäische Put-Option:

$$\begin{aligned} P_0 &= C_0 - S_0 + \frac{K}{(1 + r)^T} \\ &= 5.850 - 40 + \frac{38}{1.05^2} \\ &= 0.317 \end{aligned}$$

(c) Bewerten Sie die Call-Option durch Replikation. Bestimmen Sie dazu in jedem Knoten das Replikationsportfolio. Erklären Sie detailliert, wie das Replikationsportfolio dynamisch angepasst werden muss.

Lösung: Das Replikationsportfolio lässt sich wie im Einperiodenmodell durch das Lösen eines Gleichungssystems in jedem Knoten berechnen. Wir starten mit Knoten C. Wir bezeichnen die Positionen in der Aktie mit Δ_C und im Geldmarktkonto mit φ_C.

$$\begin{aligned} \Delta_C S_0 (1 + u)^2 + \varphi_C (1 + r)^2 &= C_D \\ \Delta_C S_0 (1 + u)(1 + d) + \varphi_C (1 + r)^2 &= C_E. \end{aligned}$$

Die Lösung des LGS lautet

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{C_D - C_E}{S_0 (1 + u)^2 - S_0 (1 + u)(1 + d)} \\ \varphi_C &= (1 + r)^{-2} \left(C_D - \Delta_C S_0 (1 + u)^2\right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta_C &= \frac{10.4 - 1.6}{48.4 - 39.6} \\
&= 1 \\
\varphi_C &= (1.05)^{-2}\,(10.4 - 1 \cdot 48.4) \\
&= -34.47
\end{aligned}$$

Der Preis dieses Replikationsportfolios in Knoten C beträgt:

$$\Delta_C S_0(1+u) + \varphi_C(1+r) = 44 - 34.47 \cdot 1.05 = 7.809.$$

In Knoten B ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}
\Delta_B &= \frac{C_E - C_F}{S_0(1+u)(1+d) - S_0\,(1+d)^2} \\
\varphi_B &= (1+r)^{-2}\,(C_E - \Delta_B S_0(1+u)(1+d))
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta_B &= \frac{1.6 - 0}{39.6 - 32.4} \\
&= 0.222 \\
\varphi_B &= (1.05)^{-2}\,(1.6 - 0.222 \cdot 39.6) \\
&= -6.531.
\end{aligned}$$

Der Preis dieses Replikationsportfolios in Knoten C beträgt:

$$\Delta_B S_0(1+d) + \varphi_B(1+r) = 0.222 \cdot 36 - 6.531 \cdot 1.05 = 1.143.$$

Für Knoten A gilt dann entsprechend $\Delta_A = 0.8\bar{3}$, $\varphi_A = -27.483$, und der Preis ist gegeben durch $0.8\bar{3} \cdot 40 - 27.483 \cdot 1 = 5.850$.

Zur Interpretation starten wir in Knoten A zum Zeitpunkt 0. Wir kaufen das Replikationsportfolio zum Preis von 5.850, d.h. wir kaufen 0.83 Anteile der Aktie und finanzieren diese Investition durch einen Kredit in Höhe von 27.483.

Dieses Portfolio hat in Knoten B einen Wert von $0.8\bar{3} \cdot 36 - 27.483 \cdot 1.05 = 1.143$. Zum Hedge der Option benötigen wir jedoch 0.222 Anteile der Aktie (Preis = 36) und -6.531 Einheiten des Geldmarktkontos (Preis = 1.05). Der Wert dieses Portfolios entspricht natürlich wieder dem Optionspreis in Höhe von 1.143 in diesem Knoten. Wir können nun das Replikationsportfolio ohne uns zu- oder abfließende

Zahlungsströme anpassen. $\Longrightarrow$ Verkaufe das Portfolio aus Knoten A und Kaufe das neue Portfolio. In Knoten C können wir das Replikationsportfolio analog anpassen. Eine solche Portfoliostrategie, bei der man die Zusammensetzung des Portfolios dynamisch ohne Mittelzu- oder Abflüsse anpassen kann, nennt man *selbstfinanzierend*. Die Eigenschaft der Selbstfianzierung stellt sicher, dass die Option vollständig repliziert werden kann, so dass das Portfolio zu jedem Zeitpunkt und Zustand gleich viel Wert ist wie die Option, ohne dass Mittel zu- oder abfließen. Es macht insbesondere keinen Unterschied, ob man das Portfolio in $t = 0$ kauft und dynamisch anpasst, oder die Option in $t = 0$ erwirbt. Beide Strategien produzieren zu jedem Zeitpunkt identische Cash-Flows, so dass der Wert der Option in jedem Zeitpunkt dem Preis der selbst-finanzierenden Replikationsstrategie entspricht.

2. Betrachten Sie ein Binomialmodell mit den folgenden Werten: $S_0 = 40$, $K = 40$, $r = 0.05$, $u = 0.1$, $d = -0.1$, $T = 3$ und $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Nehmen Sie an eine Bank verkauft eine Europäische Put-Option für einen Preis von 1. Wie groß ist der Gewinn bei dieser Transaktion. Wie können Sie diesen Gewinn gegenüber Kursschwankungen der unterliegenden Aktie absichern? Erklären Sie detailliert.

   Lösung: Siehe Excel-Datei.

3. Bewerten Sie in dem Modellrahmen aus Aufgabe 2 die folgenden Optionen.

   (a) Amerikanische Put-Option

   (b) Asiatische Put-Option

   (c) Cash-or-nothing Call-Option

   (d) Kanarische Put-Option, die nur in $t = 1$ oder $t = 3$ ausgeübt werden kann.

   (e) Chooser Option, die in $t = 1$ entweder gegen einen europäischen Call oder einen europäischen Put getauscht werden kann

   (f) Knock-out-Call-Option, die beim erstmaligen Überschreiten von $\tilde{K} = 45$ während der Laufzeit wertlos wird

   (g) Knock-in-Call-Option, die erst beim erstmaligen Unterschreiten von $\tilde{K} = 38$ während der Laufzeit aktiviert wird

   (h) Exchange-Option, bei der am Ende der Laufzeit die Aktie gegen das Werpapier mit den Eigenschaften $\tilde{S}_0 = 40$, $\tilde{u} = 0.12$, $\tilde{d} = -0.12$ getauscht werden kann.

   Lösung: Siehe Excel-Datei.