Finanzderivate und Risikomanagement
Sommersemester 2021
Dr. Christoph Hambel
Übungsblatt 2

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Erklären Sie Ihre Antwort.

   (a) Unvollständige Märkte sind niemals arbitragefrei.

   Lösung: Falsch. *Unvollständigkeit und die Existenz von Arbitragemöglichkeiten sind zwei verschiedene Konzepte.*

   (b) Das Bewerten mit Hilfe von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten impliziert, dass Investoren risikoneutral sind.

   Lösung: Falsch. *Es handelt sich bei der Bewertung unter $\mathbb{Q}$ lediglich um eine mathematische Maanipulation der Wahrscheinlichkeiten und des Diskontsatzes.*

   (c) In Märkten mit Arbitragemöglichkeiten können Wertpapiere nicht repliziert werden.

   Lösung: Falsch. *Replikation und die Existenz von Arbitragemöglichkeiten sind zwei verschiedene Konzepte.*

   (d) Es können nur bestimmte Wertpapiere als Numeraire verwendet werden.

   Lösung: Wahr. *Nur Wertpapiere, die stets eine positive Auszahlung in der Replikationsmatrix haben können als Numeraire dienen.*

   (e) Die Existenz von Arbitragemöglichkeiten impliziert, die Nichtexistenz von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten.

   Lösung: Wahr. *Dies ist Teil des Ersten Fundamentalsatzes der Wertpapierbewertung.*

   (f) In einem Einperiodenmodell ist der Markt genau dann vollständig, wenn die Payoff-Matrix vollen Rang hat.

   Lösung: Wahr. *Vollständigkeit lässt sich klassifizieren durch den vollen rang der Auszahlungsmatrix. Diese muss aber nicht quadratisch sein.*

   (g) Ein unvollständiger Markt impliziert, dass kein Derivat aus den Basiswertpapieren repliziert werden kann.

   Lösung: Falsch. *Unvollständigkeit bedeutet, dass nicht alle Derivate repliziert werden können.*

(h) In einem unvollständigen Markt können risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten existieren.

Lösung: Wahr. *Existenz risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten bedeutet No Arbitrage, aber im unvollständigen Markt sind diese Wahrscheinlichkeiten nicht eindeutig.*

(i) Optionsbewertung in unvollständigen aber arbitragefreien Märkten führt zu uneindeutigen Preisen aller Derivate.

Lösung: Falsch. *Optionsbewertung in unvollständigen aber arbitragefreien Märkten führt zu uneindeutigen Preisen derjenigen Derivate, die nicht repliziert werden können.*

(j) Nichtexistenz von Arbitrage ermöglicht es mit Hilfe des Replikationsansatzes zu bewerten.

Lösung: Falsch. *Nichtexistenz von Arbitrage sagt nicht darüber aus, ob ein Derivat repliziert werden kann.*

(k) In einem arbitragefreien Markt existieren risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten. Diese sind jedoch nur dann zwischen 0 und 1, wenn der Markt vollständig ist.

Lösung: Falsch. *Wahrscheinlichkeiten sind stets Zahlen zwischen 0 und 1.*

(l) Künstliche Wahrscheinlichkeiten mit der Aktie als Numeraire existieren genau dann, wenn riskoneutrale Wahrscheinlichkeiten existieren.

Lösung: Wahr. *Das ist genau dann der Fall, wenn der Markt arbitragefrei ist.*

2. Betrachten Sie eine Ökonomie mit zwei Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$. In $t = 1$ gibt es zwei mögliche Zustände, die mit der Auszahlungsmatrix X beschrieben werden können. Auszahlungsmatrix und Preisvektor p sind geben durch:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 80 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die künstlichen Wahrscheinlichkeiten für die Fälle, dass Wertpapier 1 oder Wertpapier 2 als Numeraire dienen.

Lösung: Wertpapier 1 als Numeraire (künstliche Wahrscheinlichkeit für Zustand 1: $\widetilde{q}$):

$$\begin{aligned} \frac{100}{100} &= \widetilde{q}\frac{80}{120} + (1-\widetilde{q})\frac{120}{80} \\ \Rightarrow \widetilde{q} &= 0.6. \end{aligned}$$

Wertpapier 1 als Numeraire (künstliche Wahrscheinlichkeit für Zustand 1: $\bar{q}$):

$$\begin{aligned}\frac{100}{100} &= \bar{q}\frac{120}{80} + (1-\bar{q})\frac{80}{120} \\ \Rightarrow \bar{q} &= 0.4.\end{aligned}$$

Künstliche Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich nach Wahl des Numeraires, obwohl das Problem symmetrisch ist.

(b) Was können Sie über Arbitragemöglichkeiten folgern?

Lösung: Der Markt ist arbitragefrei, da die künstlichen Wahrscheinlichkeiten exisiteren.

(c) Bestimmen Sie das Replikationsportfolio $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ für den Auszahlungsvektor

$$x_3 = \begin{pmatrix} 160 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Preis dieses Wertpapieres auf zwei verschiedene Arten.

Lösung: 1.) Bewertung mittels Replikation:

$$X \cdot \varphi = x_{k+1} \Rightarrow p_{k+1} = p^T \varphi$$

In dieser Aufgabe:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 120 & 80 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 160 \\ 40 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \varphi &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$p_3 = (100 \quad 100)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 100$$

2.) Bewertung mittels künstlicher Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}\frac{p_3}{p_1} &= \widetilde{q}\frac{x_{13}}{x_{11}} + (1-\widetilde{q})\frac{x_{23}}{x_{21}} \\ \Rightarrow p_3 &= p_1\left[\widetilde{q}\frac{x_{13}}{x_{11}} + (1-\widetilde{q})\frac{x_{23}}{x_{21}}\right] \\ &= 100 \cdot \left[0.6 \cdot \frac{160}{120} + 0.4 \cdot \frac{40}{80}\right] \\ &= 100.\end{aligned}$$

(d) Bestimme den Preis des risikolosen Wertpapieres

Lösung: Wir stellen zunächst fest:

$$x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dieses Wertpapier risikofrei. Gemäß des LOP ist der Preis in $t = 0$: $100 + 100 = 200$. Der risikofreie Zins ist damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{200}{1 + r_f} &= 200 \\ \Rightarrow r_f &= 0. \end{aligned}$$

(e) Bestimmen Sie die riskoneutralen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten nutzen das risikofreie Wertpapier als Numeraire (riskoneutrale Wahrscheinlichkiet für Zustand 1: q):

$$\begin{aligned} \frac{100}{100} &= q\frac{80}{100} + (1 - q)\frac{120}{100} \\ \Rightarrow q &= 0.5. \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man Wertpapier 2 unter $\mathbb{Q}$ bewertet.

(f) Bewerten Sie eine Call-Option auf Wertpapier 1 mit Strike-Preis $K = 100$.

Lösung: Wir nutzen Wertpapier 1 als Numeraire:

$$\begin{aligned} x_4 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{p_4}{p_1} &= \left(0.6 \cdot \frac{20}{120} + 0.4 \cdot \frac{0}{80}\right) \\ &= 0.1 \\ \Rightarrow p_4 &= 10 \end{aligned}$$

Alternativ ist auch eine Bewertung unter $\mathbb{Q}$ und $\bar{\mathbb{Q}}$ möglich.

3. Betrachten Sie einen Einperioden-Binomialbaum mit folgenden Parametern $S_0 = 40$, $u = 0.1$, $d = -0.1$, and $r = 0.02$.

(a) Bewerten Sie jeweils einen Europäischen Call und einen Europäischen Put mit einem Strike-Preis von $K = 40$.

Lösung: Man berechne die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und bewerte die Optionen unter $\mathbb{Q}$:

$C_0 = 2.353$; $P_0 = 1.569$

(b) Was ist die erwartete Rendite der Aktie und der beiden Optionen unter den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten?

Lösung: Es ist leicht nachzurechnen, dass unter $\mathbb{Q}$ die erwartete Rendite aller gehandelten Papiere gleich dem risikofreien Zins r_f ist.

(c) Berechnen Sie die erwarteten Renditen unter den wahren Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}$ unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Kursanstieg $p = 0.7$ beträgt. Vegleichen Sie diese Renditen mit denen unter $\mathbb{Q}$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Lichte des CAPM!

Lösung: Renditen sind zustandsabhängig.

Zustand	q	p	r_C	r_P	r_S
1	0.6	0.7	$\frac{4}{2.353} - 1 = 0.7$	$\frac{0}{1.569} - 1 = -1$	0.1
2	0.4	0.3	$\frac{0}{2.353} - 1 = -1$	$\frac{4}{1.569} - 1 = 1.549$	-0.1

Erwartete Renditen unter $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}
\mu_S = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(r_S) &= 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot (-0.1) \\
&= 0.04 \\
\mu_C = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(r_C) &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot (-1) \\
&= 0.19 \\
\mu_P = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(r_P) &= 0.7 \cdot (-1) + 0.3 \cdot 1.549 \\
&= -0.235
\end{aligned}$$

Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit q für Zustand 1 ist gegeben durch:

$$\frac{r-d}{u-d} = \frac{0.02 - (-0.1)}{0.1 - (-0.1)} = 0.6$$

.

Wenn die reale Wahrscheinlichkeit p größer ist als die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit q verlangen Investoren eine Riskoprämie. Beachte, dass im schlechten Zustand ist die riskoneutrale Wahrscheinlichkeit geringer als die reale, d.h. $\mathbb{Q}$ legt mehr Gewicht auf den schlechten Zustand. Damit ist die erwartete Rendite der Aktie unter $\mathbb{P}$ größer als unter $\mathbb{Q}$.

Da unter $\mathbb{Q}$ die erwartete Rendite r_f beträgt ist die Riskoprämie genau $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(r_S) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(r_S)$. In dieser Aufgabe gilt für die Riskoprämie der Aktie:

$$E^{\mathbb{P}}(r_S) - r_f = 0.04 - 0.02 = 0.02.$$

Assets mit hohen Payoffs in Zuständen mit hohen Aktienkursen (wie Call-Optionen) sind günstig (d.h. sie haben eine hohe erwartete Rendite). Umgekehrt sind Papiere, die der Risikoabsicherung dienen (wie Put-Optionen) teuer (niedrige, oder gar negative erwartete Rendite).

Optionen haben eine Hebelwirkung. Diese schlägt sich in betragsmäßig großen Betas nieder. Die Betas im Sinne des CAPM lassen sich asu der SML berechnen:

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$$

Da der Markt nur aus einer einzelnen Aktie besteht gilt $\mu_M = \mu_S$ und damit $\beta_S \equiv 1$. Wir erhalten folgende Optionsbetas:

$$\beta_C = \frac{E^{\mathbb{P}}(r_C) - r_f}{E^{\mathbb{P}}(r_S) - r_f} = \frac{0.19 - 0.02}{0.04 - 0.02} = 8.5$$

und

$$\beta_P = \frac{E^{\mathbb{P}}(r_P) - r_f}{E^{\mathbb{P}}(r_S) - r_f} = \frac{-0.235 - 0.02}{0.04 - 0.02} = -12.75.$$

(d) Nehmen Sie nun an, dass die wahre Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ beträgt. Wiederholen Sie die vorangegangene Übung für die beiden Optionen. Erklären Sie Ihre Ergebnisse!

Lösung: Nun erhalten wir $E^{\mathbb{P}}(r_S) = 0$, d.h. $E^{\mathbb{P}}(r_S) - r = -0.02$. Damit hat die Aktie eine negative Risikoprämie. Für die Optionen gilt nun $E^{\mathbb{P}}(r_C) = -0.15$ und $E^{\mathbb{P}}(r_P) = 0.275$.

Der Grund für dieses Ergebnis ist analog zur vorherigen Teilaufgabe mit $p = 0.7$: Nun ist die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für den schlechten Zustand geringer als die reale Wahrscheinlichkeit für diesen Zustand, d.h. $\mathbb{Q}$ legt mehr Gewicht auf den guten Zustand. Damit ist die erwartete Rendite unter $\mathbb{Q}$ nun größer als die erwartete Rendite unter $\mathbb{P}$.

Investoren sind also nun risikofreudig! Assets mit hohen Payoffs in Zuständen mit hohen Aktienkursen (wie Call-Optionen) sind teuer (d.h. sie haben eine niedrige erwartete Rendite). Umgekehrt sind Papiere, die der Risikoabsicherung dienen (wie Put-Optionen) günstig (hohe erwartete Rendite).

Die Betas der Optionen verändern sich nicht: Mit $p = 0.5$ erhält man wieder $\beta_C = 8.5$ und $\beta_P = -12.75$!

4. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell mit Auszahlungsmatrix X und Preisvektor p:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 100 \\ 8 & 9 & 100 \\ 14 & 15 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 80 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche Werte von α ist der Markt vollständig?

Lösung: Der Markt ist vollständig, wenn die Payoff-Matrix vollen Rang hat. Bei quadratischen Matrizen ist das äquivalent zur Bedingung, dass die Determinante ungleich Null ist. Mit der Regel von Sarrus erhält man

$$\begin{aligned} \det(X) = 12\alpha - 2400 &\neq 0 \\ \alpha &\neq 200 \end{aligned}$$

Der Markt ist vollständig für $\alpha \neq 200$.

(b) Für welchen Wert von α handelt es sich bei x_3 um ein risikofreies Wertpapier? Geben Sie den risikofreien Zins an. Ist für diesen Wert von α der Markt arbitragefrei? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch!

Lösung: Offensichtlich ist das dritte Wertpapier risikofrei, falls gilt $\alpha = 100$. In diesem Falle ist der Zins gegeben durch

$$80(1 + r) = 100 \qquad \Longrightarrow \qquad r = \frac{100}{80} - 1 = 25\%$$

Der Markt ist arbitragefrei, falls risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten existieren, d.h. falls das lineare Gleichungssystem $X^\top q = p(1 + r)$ einen nichtnegativen Vektor q liefert, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 14 \\ 3 & 9 & 15 \\ 100 & 100 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 80 \end{pmatrix} (1 + r)$$

Lösen mittels Gauß-Algorithmus liefert $q = (0.5, 0.25, 0.25)^\top$. Damit ist der Markt arbitragefrei.