

Finanzderivate und Risikomanagement
Sommersemester 2021
Dr. Christoph Hambel
Übungsblatt 2

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Erklären Sie Ihre Antwort.
 - (a) Unvollständige Märkte sind niemals arbitragefrei.
 - (b) Das Bewerten mit Hilfe von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten impliziert, dass Investoren risikoneutral sind.
 - (c) In Märkten mit Arbitragemöglichkeiten können Wertpapiere nicht repliziert werden.
 - (d) Es können nur bestimmte Wertpapiere als Numeraire verwendet werden.
 - (e) Die Existenz von Arbitragemöglichkeiten impliziert, die Nichtexistenz von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten.
 - (f) In einem Einperiodenmodell ist der Markt genau dann vollständig, wenn die Payoff-Matrix vollen Rang hat.
 - (g) Ein unvollständiger Markt impliziert, dass kein Derivat aus den Basiswertpapieren repliziert werden kann.
 - (h) In einem unvollständigen Markt können risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten existieren.
 - (i) Optionsbewertung in unvollständigen aber arbitragefreien Märkten führt zu uneindeutigen Preisen aller Derivate.
 - (j) Nichtexistenz von Arbitrage ermöglicht es mit Hilfe des Replikationsansatzes zu bewerten.
 - (k) In einem arbitragefreien Markt existieren risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten. Diese sind jedoch nur dann zwischen 0 und 1, wenn der Markt vollständig ist.
 - (l) Künstliche Wahrscheinlichkeiten mit der Aktie als Numeraire existieren genau dann, wenn riskoneutrale Wahrscheinlichkeiten existieren.

2. Betrachten Sie eine Ökonomie mit zwei Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$. In $t = 1$ gibt es zwei mögliche Zustände, die mit der Auszahlungsmatrix X beschrieben werden

können. Auszahlungsmatrix und Preisvektor p sind gegeben durch:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 80 \\ 80 & 120 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die künstlichen Wahrscheinlichkeiten für die Fälle, dass Wertpapier 1 oder Wertpapier 2 als Numeraire dienen.
- (b) Was können Sie über Arbitragemöglichkeiten folgern?
- (c) Bestimmen Sie das Replikationsportfolio $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ für den Auszahlungsvektor

$$x_3 = \begin{pmatrix} 160 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Preis dieses Wertpapiers auf zwei verschiedene Arten.

- (d) Bestimme den Preis des risikolosen Wertpapiers
- (e) Bestimmen Sie die riskoneutralen Wahrscheinlichkeiten.
- (f) Bewerten Sie eine Call-Option auf Wertpapier 1 mit Strike-Preis $K = 100$.

3. Betrachten Sie einen Einperioden-Binomialbaum mit folgenden Parametern $S_0 = 40$, $u = 0.1$, $d = -0.1$, and $r = 0.02$.

- (a) Bewerten Sie jeweils einen Europäischen Call und einen Europäischen Put mit einem Strike-Preis von $K = 40$.
- (b) Was ist die erwartete Rendite der Aktie und der beiden Optionen unter den riskoneutralen Wahrscheinlichkeiten?
- (c) Berechnen Sie die erwarteten Renditen unter den wahren Wahrscheinlichkeiten \mathbb{P} unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Kursanstieg $p = 0.7$ beträgt. Vergleichen Sie diese Renditen mit denen unter \mathbb{Q} und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Lichte des CAPM!
- (d) Nehmen Sie nun an, dass die wahre Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ beträgt. Wiederholen Sie die vorangegangene Übung für die beiden Optionen. Erklären Sie Ihre Ergebnisse!

4. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell mit Auszahlungsmatrix X und Preisvektor p :

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 100 \\ 8 & 9 & 100 \\ 14 & 15 & \alpha \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- (a) Für welche Werte von α ist der Markt vollständig?
- (b) Für welchen Wert von α handelt es sich bei x_3 um ein risikofreies Wertpapier? Geben Sie den risikofreien Zins an. Ist für diesen Wert von α der Markt arbitragefrei? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch!