

**Finanzderivate und Risikomanagement**  
**Sommersemester 2021**  
**Dr. Christoph Hambel**  
**Klausur**  
**23.07.2021 – 15:30 Uhr**

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Die Klausur besteht aus vier Aufgaben mit einer Gesamtpunktzahl von 90.
- Die Klausur ist Open-Book, d.h. es dürfen beliebige tote Gegenstände als Hilfsmittel eingesetzt werden.
- Jedwede Kommunikation mit einer anderen Person ist während der Bearbeitungszeit nicht gestattet und gilt als Täuschungsversuch.

**Aufgabe 1 (15 Punkte)** Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung. Ohne Begründung erhalten Sie keine Punkte auf die jeweilige Teilaufgabe.

- (a) Ein Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß gibt unter dem alle gehandelten Wertpapiere eine erwartete Rendite in Höhe des risikofreien Zinses haben. *(3 credits)*

- (b) Amerikanische Call-Optionen werden nie vorzeitig ausgeübt, sofern das Underlying keine Dividende ausschüttet. *(3 credits)*

- (c) Optionsbewertung unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  ist nicht möglich. Dazu bedarf es eines künstlichen Wahrscheinlichkeitsmaßes. *(3 credits)*

- (d) Für Anwendungen im Risikomanagement ist das reale Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  entscheidend. *(3 credits)*

- (e) Ein Ho-Lee Modell mit anfänglicher Zinsstruktur  $B_0(t) = \exp(-0.1t + 0.01t^2)$  erzeugt eine inverse Zinsstrukturkurve in  $t = 0$ . *(3 credits)*

**Aufgabe 2 (20 Punkte)** Betrachten Sie folgende Ökonomie mit zwei Zeitpunkten “heute” ( $t = 0$ ) und “morgen” ( $t = 1$ ). In  $t = 1$  sind drei Zustände möglich. Es seien drei Wertpapiere mit Payoff-Matrix  $X$  und Preisvektor  $p$  gegeben.

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 100 \\ 8 & 9 & 100 \\ 14 & 15 & \alpha \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 95 \end{pmatrix}$$

- (a) Definieren Sie kurz einen vollständigen Kapitalmarkt. (2 credits)

- (b) Für welche Werte von  $\alpha$  ist der Kapitalmarkt unvollständig? (3 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung: 200**

- (c) (i) Für welchen Wert von  $\alpha$  ist eines der Wertpapiere risikofrei? (2 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung: 100**

- (ii) Geben Sie für diesen Wert von  $\alpha$  den risikofreien Kassazins an (2 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung: 5.26%**

Nehmen Sie für den Rest der Aufgabe den Wert von  $\alpha$  aus (c) an.

- (d) (i) Ist der Kapitalmarkt für diesen Wert von  $\alpha$  arbitragefrei? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch. (3 credits)

(ii) Geben Sie die Werte der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten  $q_1, q_2, q_3$  an.

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $q_1: 0.5$

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $q_2: 0.4474$

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $q_3: 0.0526$

(e) Bestimmen Sie den Preis einer Europäischen Call-Option auf das erste Wertpapier mit Basispreis  $K = 5$ . (5 credits)

*Hinweis: Sollten Sie eine der vorausgegangenen Rechenaufgaben nicht lösen gekonnt haben, so verwenden Sie bitte hierzu  $r_f = 4\%$ ,  $q_1 = 0.4$ ,  $q_2 = 0.5$ ,  $q_3 = 0.1$ .*

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $C_0: 1.73$

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:** Alternative Parameter:  $C_0: 2.31$

**Aufgabe 3 (20 Punkte)** Betrachtet werde ein Dreiperiodenmodell, mit  $u = 0.08$ ,  $S_0 = 50$ ,  $\Delta t = 1$ ,  $r = 0.8\%$ . Das Modell starte in  $t = 0$ .

- (a) Ermitteln Sie die Volatilität der Aktie, den Parameter  $d$  sowie die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, dass es zu keinem Kursverlust der Aktie zwischen  $t = 2$  und  $t = 3$  kommt, d.h.  $\mathbb{Q}(S_3 \geq S_2 \mid S_2)$ . (5 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $\sigma: 0,0770$

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $d: -0,0741$

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $\mathbb{Q}(S_3 \geq S_2 \mid S_2): 0,5327$

- (b) Bewerten Sie einen Lookback-Call mit Fälligkeit in  $T = 2$ . (5 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:**  $C_0: 3,23$

- (c) Nehmen Sie an, Sie möchten diese Option dynamisch hedgen.

- (i) Bestimmen Sie den Wert des Replikationsportfolios in  $t = 2$ , wenn die Aktie dem Pfad  $u \rightarrow d$  folgt, es also zunächst zu einem Kursanstieg und anschließend zu einem Kursverlust kommt. (3 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:** Replikationsportfolio: 0

- (ii) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Pfad  $d \rightarrow u$ . Geben Sie an längs welchen Pfades das Replikationsportfolio die größere Aktienposition in  $t = 2$  aufweist und begründen Sie Ihre Antwort. Es ist keine Rechnung nötig. (3 credits)

- (d) Nennen Sie die qualitativen Unterschiede in der Bewertung eines Lookback-Calls und eines Plain-Vanilla Calls. (4 credits)

**Aufgabe 4 (20 Punkte)** Betrachten Sie eine Aktie, deren Preis durch die folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben wird

$$dS_t = S_t[\mu dt + \sigma dW_t],$$

Im Black-Scholes Modell erfährt die implizite Volatilität eine sehr populäre Bedeutung, hat aber gewisse Schwächen.

- (a) Was versteht man unter dem Volatilitätssmile? Was können Sie daraus für die Gültigkeit des Black-Scholes Modells folgern? (3 credits)

- (b) Am Markt werde der folgende funktionale Zusammenhang zwischen Basispreis  $K$ , Restlaufzeit  $\tau$  und impliziter Volatilität  $\hat{\sigma}$  beobachtet:

$$\hat{\sigma} = 0.2 - 0.05K - 0.025\tau$$

Bewerten Sie auf dieser Grundlage mit  $r = 0.01$ ,  $\mu = 0.05$  und  $S_0 = 1$  die folgenden Optionen. Geben Sie Ihr Ergebnis jeweils auf vier Nachkommastellen gerundet an.

- (i) Europäischer Put mit  $K = 1$  und  $\tau = 0.5$  (4 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:  $P_0$ : 0.0362**

- (ii) Amerikanischer Call mit  $K = 0.9$  und  $\tau = 0.75$  (4 credits)

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:  $C_0$ : 0.1168**

- (c) Welches Problem tritt auf, wenn Sie in diesem Setting eine Option mit sehr großem Strike-Preis bewerten wollen? Wie kann man dieses Problem lösen? (4 credits)

- (d) (i) Zur Absicherung gegenüber Änderungen in der Volatilität verwenden Optionshändler Hedging-Strategien, die das Vega berücksichtigen. Geben Sie eine kurze Definition für Vega an und begründen Sie, warum das Vega nicht negativ sein kann. *(2 credits)*

- (ii) Berechnen Sie diese Größe für den Europäischen Put aus (b) (i). Geben Sie Ihr Ergebnis auf vier Nachkommastellen gerundet an. *(3 credits)*

**In LPlus zu hinterlegende Lösung:  $\mathcal{V}$ : 0.3817**