

# Finanzderivate und Risikomanagement

Dr. Christoph Hambel

Goethe Universität Frankfurt  
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften  
Abteilung Finanzen

Sommer-Semester 2021

# Teil VII

## Bewertung von Ausfallrisiken

1 Grundlagen

2 Merton Firmenwertmodell

- Versprochene Zahlungen können nicht geleistet werden:
  - Kreditausfall
  - Kontrahentenrisiko bei Derivatgeschäften
  - ...
- Bewertungsproblem: Niedrigerer Preis wegen Ausfallrisiko, aber um wie viel?
- Wichtigste Determinanten
  - Ausfallwahrscheinlichkeit
  - Loss given default

- Wichtiger Unterschied: *historische* vs. *risikoneutrale* Ausfallwahrscheinlichkeiten
  - Historisch: werden aus tatsächlichen Kreditausfällen geschätzt
  - Risikoneutral: implizit durch Preise von Finanzprodukten gegeben
- Bedingte vs. unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten
  - Unbedingt: Ausfallwahrscheinlichkeit in  $t$ , gegeben dem Anfangszustand  $\mathbb{P}(\tau = t)$
  - Bedingt: Ausfallwahrscheinlichkeit in  $t$ , gegeben kein Ausfall vor  $t$

$\tau$ : Zeitpunkt des Kreditausfalls  $\mathbb{P}(\tau = t | \tau > t-1)$

- Beispiel: Ausfallwahrscheinlichkeit in  $t$ , gegeben kein Ausfall vor  $t$ , ist 2% p.a.

Jahr	bed.	unbed.
1	0.02	0.02
2	0.02	0.0196
3	0.02	0.0192

$$P(\tau = 1)$$

$$P(\tau = 2)$$

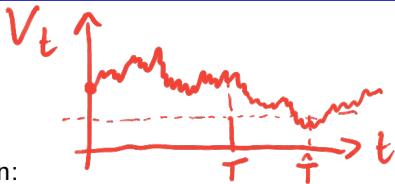
$$P(\tau = 3)$$

- Erklärung:

- Ausfallwahrscheinlichkeit im ersten Jahr: 2% ✓
- Überlebende Firmen fallen im nächsten Jahr aus mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0.02(1 - 0.02) = 0.0196$

$$0.02 \cdot 0.98 = 1.96\%$$

$$P(\tau = 3) = 0.02 \cdot 0.98^2 = 1.92\%$$



- Modelltypen:

- Structural Models: Firmenwertmodelle

→ Merton

Modelliere den Firmenwert mittels eines Firm Value Process.

⇒ Ausfall tritt ein, wenn Wert der Assets zu gering um Verbindlichkeiten abzudecken.

- Reduced-Form Models: Intensitätenmodelle:

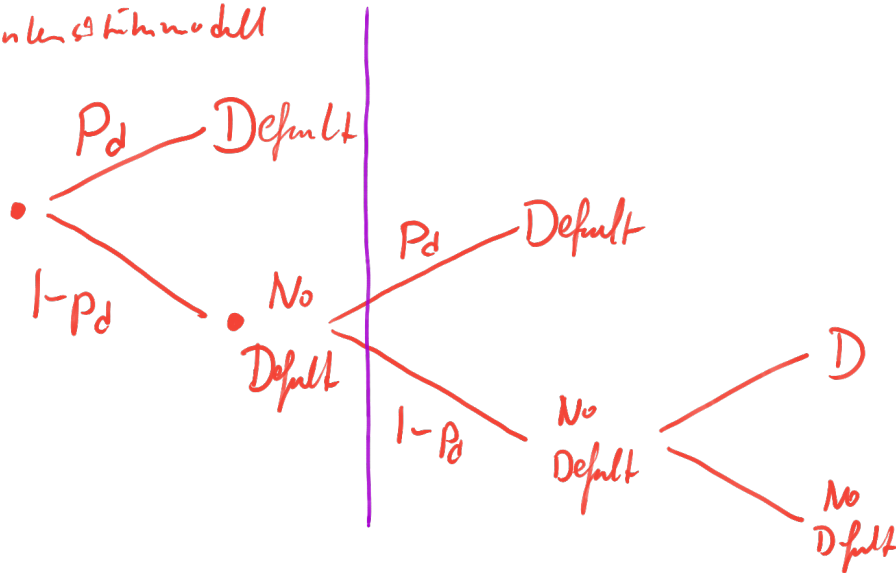
Latenter Ausfallprozess: entweder 0 (kein Ausfall) oder 1 (Ausfall)

⇒ Modelliert durch Sprungprozess mit Sprungwahrscheinlichkeit



- Rating-Modelle S&P, Fitch, Moodys  
↳ AAA, AA, ..., D

Inferenzmodell





- 1 Grundlagen
- 2 Merton Firmenwertmodell

# Idee: Merton Firmenwertmodell

$$V_0 \begin{cases} V_T^u = V_0(1+u) \\ V_T^d = V_0(1+d) \end{cases}$$

A	L
Assets	$E_T$ $D_T$
$V_T$	$V_T$

$$V^u > D_T > V^d$$

$$\begin{aligned} E_T &= V_T - D_T \\ &= V_T - \min(V_T, F) \\ &= -\min(F - V_T, 0) = \max(V_T - F, 0) \end{aligned}$$

Face Value  
of the Bond  
↓

# Merton Firmenwertmodell

- Firma hat Schulden – modelliert durch Zero-Coupon Bond mit
  - Nominalbetrag  $F$
  - Fälligkeit in  $T$
  - Ausfall nur in  $T$  möglich
- In  $T$ : Auszahlung an die Gläubiger hängt vom Firmenwert ab  $V_T$

$$D_T = \min\{V_T, F\}$$

- Wenn  $V_T < F$ : Kreditausfall  
⇒ Loss given Default:  $F - V_T$
- Eigenkapitalgeber erhalten das Residuum:

(111)

$$\begin{aligned} E_T &= V_T - D_T \\ &= V_T - \min\{V_T, F\} = \max(V_T - F; 0) \end{aligned}$$

⇒ Eigenkapital ist eine Call-option auf den Firmenwert mit Fälligkeit in  $T$  und Strike-Preis  $F$ !

# Merton Firmenwertmodell

- Modelliere den Firmenwert analog zum Aktienkurs im Black-Scholes Modell ( $V$  ist lognormal)
- Bewertung des Eigenkapitals wie Call-Option auf den Firmenwert  
⇒ Black-Scholes Formel liefert:  $S_0 \rightarrow V_0$

$$E_0 = V_0 \Phi(d_1) - Fe^{-rT} \Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/F) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

MM

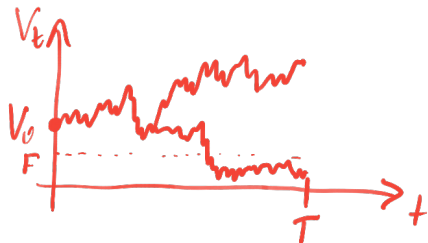
$$D_0 = V_0 - E_0$$

$\sigma$ : Volatilität des Vermögens

- Eigenkapitalvolatilität:

$$\sigma_E = \sigma \frac{\partial E_0}{\partial V_0} \frac{V_0}{E_0}$$

# Volatilität des Eigenkapitals



$$dV_t = V_t (\mu dt + \sigma dW)$$

$$\sigma_E^\checkmark = \sigma \frac{V_0}{E_0^\checkmark} \underbrace{\frac{\partial E_0}{\partial V_0}}_{=1} = \sigma \frac{V_0}{E_0} \Delta_c$$

$$= \sigma \frac{V_0}{E_0} \cdot \Phi(d_1)$$

$$\underbrace{E \sigma_E}_{(1)} = \underbrace{V \sigma}_{(2)} \cdot \Phi(d_1) \quad \text{BS: } \frac{\partial C_0}{\partial S_0} = \Delta_c$$

- Schwächen des Modells:
  - $V$  wird typischerweise nicht gehandelt ( $E$  möglicherweise schon)  
⇒ Woher kennen wir  $\sigma$ ?
  - Firmen emittieren nicht einen Zero-Bond sondern viele Coupon-Bonds
  - unterschiedliche Laufzeiten der Kredite ...
- Aber ökonomische Implikationen sehr plausibel!
- Firmenwertmodell stellt die Grundlage vieler äußerst praxisrelevanter Modelle im Kreditrisikomanagement (Moody's KMV Model, J.P. Morgans's Credit Metrics, ...)
- Alternative Modelle im Kreditrisikomanagement: Credit Risk+

↳ Inkursfähigmodell