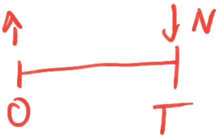
Teil VI

Bewertung von Zinsderivaten

Inhaltsverzeichnis

Zero-Bonds

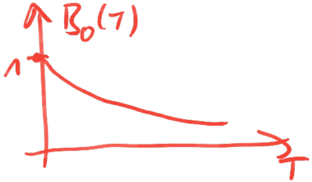
$B_0(T) = P$



- Einfachstes Zinsprodukt: Risikofreier Zero-Bond
  - Fälligkeit in T
  - Nominalbetrag N (Konvention: $N = 1$)
  - Struktur der Zahlungsströme:

Zeit t	1	...	$T-1$	T
Cash-Flow	0	...	0	$\boxed{N}$

  - Preis des Zero-Bonds mit Fälligkeit in T zum Zeitpunkt t: $\boxed{B_t(T)}$
- Funktion $D : T \mapsto B_t(T)$ für festes t:
  $\rightarrow$ *Diskontierungsfunktion* ordnet jeder Fälligkeit T den Gegenwartswert eines Euros zu.
- Eigenschaften (bei positiven Zinsen):
  - monoton fallend in T
  - $\boxed{B_t(T) < 1}$ für alle $T > t$



- Kassazinssatz (spot rate) in t für Fälligkeit in T: $\boxed{y_t(T)}$
- 1:1-Beziehung zwischen Diskontfaktor und Kassazinssatz:
  - mit diskreter Verzinsung:

$B_t(T)\left[1+y_t(T)\right]^{T-t} = 1$

$$B_t(T) = \frac{1}{[1+y_t(T)]^{T-t}}$$

$$\Rightarrow y_t(T) = \left[\frac{1}{B_t(T)}\right]^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

  - mit stetiger Verzinsung:

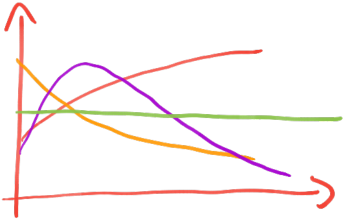
$B_t(T)\left[e^{y_t(T)}\right]^{T-t} = B_t(T)\, e^{y_t(T)(T-t)} = 1$

$$B_t(T) = e^{-\hat{y}_t(T)(T-t)} \checkmark$$

$$\Rightarrow \hat{y}_t(T) = -\frac{1}{T-t}\ln B_t(T)$$

Zinsstrukturkurve

- Abbildung $T \mapsto y_t(T)$ für festes t:
  Zinsstrukturkurve (*term structure of interest rates*) ordnet jeder Fälligkeit den jeweiligen Kassazinssatz zu.
- Problem: Wie findet man Kassazinssätze für lange Zeithorizonte? Die meisten Staatsanleihen sind Coupon-Bonds.
  $\rightarrow$ Bootstrapping
- Verschiedene Zinsstrukturkurven werden empirisch beobachtet:
  - normal
  - invers
  - hump-shaped
  - flach



Coupon-Bonds

- Coupon-Bond mit Fälligkeit in T, jährlichen Zinszahlungen, Coupon-Rate c, Nominalbetrag N
  - Structure:

Zeit t	1	2	...	$T-1$	T
Cash-Flow	$c \cdot N$	$c \cdot N$	...	$c \cdot N$	$(1+c) \cdot N$ $= N + cN$

  - Preis des Bonds mit Coupon c und Fälligkeit in T zum Zeitpunkt t: $B_t(c;T)$ Zero-Bond : $B_t(0;T) = B_t(T)$
- Theoretische Eigenschaften:
  - Coupon-Bond ist äquivalent zu einem Portfolio aus Zero-Bonds
  - Replikation/LOP: Preis des Coupon-Bond ist gleich dem Wert des Portfolios

$$B_t(c;T) = \sum_{s=t+1}^{T} B_t(s) \cdot c \cdot N + B_t(T) \cdot N$$

Rendite

- Rendite (*internal rate of return, yield*) $y_t(c;T)$ eines Coupon-Bonds mit Fälligkeit in T and Coupon-Rate c ist implizit definiert
  - diskrete Verzinsung:

$$B_t(c;T) \stackrel{!}{=} \sum_{s=t+1}^{T} N\,c\,(1+y_t(c;T))^{-(s-t)} + N\,(1+y_t(c;T))^{-(T-t)}$$

$$B_t(c;T) = \frac{Nc}{1+y_t(c;T)} + \frac{N+Nc}{[1+y_t(c;T)]^2}$$

  - stetige Verzinsung:

$1+y(c;T) = e^{\hat{y}(c;T)}$

$$B_t(c;T) \stackrel{!}{=} \sum_{s=t+1}^{T} N\,c\,e^{-\hat{y}_t(c;T)(s-t)} + N\,e^{-\hat{y}_t(c;T)(T-t)}$$

- Gleichung nach $y_t(c;T)$ auflösen ist nur (sinnvoll) möglich für $T=1,2 \rightarrow$ numerisches Auflösen

Inhaltsverzeichnis

Terminzinsen

- Terminzinssatz (*forward rate*) $f_t(T_1, T_2)$ festgelegt in t für ein Investment von $T_1 \geq t$ bis $T_2 > T_1$
- Terminzinssatz muss arbitragefrei sein:
  - Strategie A: Investiere 1 in einen Zero-Bond mit Fälligkeit in T_2
  - Strategie B: Investiere 1 in einen Zero-Bond mit Fälligkeit in T_1, lege die Auszahlung in T_1 zum Terminzins $f_t(T_1, T_2)$ an
- Beide Strategien bedürfen dem gleichen Anlagebetrag und weisen das gleiche Risikoprofil aus.
- Konsequenz: Beide Strategien müssen den gleichen Payoff in T_2 liefern.

A: $\frac{1}{B_t(T_2)}$

B: $\frac{1}{B_t(T_1)} \left[1 + f_t(T_1, T_2)\right]^{T_2 - T_1}$

Terminzinsen

- Aus dieser Überlegung lassen sich die arbitragefreien Terminzinsen ableiten:
  - Payoff der Strategie A in T_2: $B_t(T_2)^{-1}$
  - diskrete Verzinsung:

$$\underbrace{B_t(T_1)^{-1}[1 + f_t(T_1, T_2)]^{T_2 - T_1}}_{\text{Payoff der Strategie } B \text{ in } T_2} \stackrel{!}{=} B_t(T_2)^{-1} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\Rightarrow f_t^d(T_1, T_2) = \left[\frac{B_t(T_1)}{B_t(T_2)}\right]^{\frac{1}{T_2 - T_1}} - 1}$$

  - stetige Verzinsung:

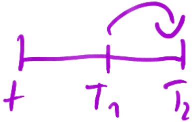
$$\underbrace{B_t(T_1)^{-1} e^{\hat{f}_t(T_1, T_2)(T_2 - T_1)}}_{\text{Payoff der Strategie } B \text{ in } T_2} \stackrel{!}{=} B_t(T_2)^{-1}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_t(T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln\left[\frac{B_t(T_1)}{B_t(T_2)}\right]$$

- Wichtig: Ohne Unsicherheit bzgl. Zinsen gilt $y_{T_1}(T_2) = f_t(T_1, T_2)$

~~Floating~~ Forward Rate Agreement (FRA)

- Ein FRA sichert zum Geschäftsabschlusses ein erst zukünftig geltender Zinssatz – unabhängig vom dann geltenden Marktzins.
- FRAs sind außerbörsliche Zinstermingeschäfte. Analoges Börsennotiertes Geschäft ist der Geldmarkt-Future.
- Typische Laufzeiten: Unter einem Jahr (Geldmarkt).



- Die Vereinbarung eines FRA umfasst
  - Der Zeitpunkt des Beginns einer in der Zukunft liegenden, fiktiven Geldaufnahme T_1,
  - die Dauer der fiktiven Geldaufnahme T_2 (Anlageperiode),
  - die Höhe der fiktiven Geldaufnahme N (das Nominal),
  - der vereinbarte Zinssatz $f_t(T_1, T_2)$ (FRA-Satz oder Forward-Zins) für die zukünftige Anlageperiode $[T_1, T_2]$
  - ein Referenzzins für dieselbe Anlageperiode (oft LIBOR) $L_t(t,T)$

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + L_t(t, T_2)(T_2 - t)\right) \\
\overset{!}{=}&\left(1 + L_t(t, T_1)(T_1 - t)\right)\left(1 + f_t(T_1, T_2)(T_2 - T_1)\right)
\end{aligned}
$$

- Variabel verzinste Anleihe: Coupon-Bond mit an einen zukünftig geltenden Referenzzinssatz angepasste Coupon-Zahlungen
- Referenzzinssatz oft LIBOR $L_t(s,\tau)$

$$\frac{1}{1+L_t(s,\tau)(\tau-s)} = \frac{B_t(\tau)}{B_t(s)}$$

$$\Rightarrow L_t(s,\tau) = \frac{1}{\tau-s}\left[\frac{B_t(s)}{B_t(\tau)}-1\right]$$

- Specialfall: $s=t$ and $\tau=s+1$: Kassazins (L_t)
- Zahlungsstruktur einer FRN:

Zeit t	1	2	...	$T-1$	T
Cash-flow	$L_0 \cdot N$	$L_1 \cdot N$	...	$L_{T-2} \cdot N$	$(1+L_{T-1}) \cdot N$

Bewertung einer Floating Rate Note

- Bestimme den Preis $\boxed{V_{T-1}}$ einer FRN in $\boxed{T-1}$:

$$\begin{aligned} V_{T-1} &= \frac{(1+L_{T-1})N}{1+L_{T-1}} \\ \Rightarrow V_{T-1} &= N \end{aligned}$$

Rückzahlung in T

Diskontierung mit LIBOR Kassazins

- Bestimme den Preis V_{T-2} einer FRN in $T-2$:

$$\begin{aligned} V_{T-2} &= \frac{\overset{N}{V_{T-1}} + N \cdot L_{T-2}}{1+L_{T-2}} \\ \Rightarrow V_{T-2} &= N \checkmark \end{aligned}$$

- Iteration bis $t=0$: $V_t = N$ für alle t!
  $\Rightarrow$ Floater werden stets zu ihrem Nominalbetrag (*at par*) gehandelt.

Zinsswap

Zinsswap (Festzins/variabler Zins)

Ein Zinsswap ist ein Zinsderivat, bei dem zwei Vertragsparteien vereinbaren, zu festgelegten zukünftigen Zeitpunkten Zinszahlungen auf festgelegte Nennwerte auszutauschen. Die Zinszahlungen werden so festgesetzt, dass eine Partei einen bei Vertragsabschluss fixierten Festzinssatz zahlt, die andere Partei hingegen einen variablen Zinssatz.

- Äquivalent: Austausch zweier Bonds
  - Payer: zahlt feste Zinszahlungen (gibt einen Coupon-Bond aus)
  - Receiver: zahlt variable Zinszahlungen (gibt eine FRN aus)
- Marktkonvention: Kein Austausch von Zahlungen bei Vetragsabschluss $\Rightarrow$ Implikation?

Zinsswap

- Der Coupon-Satz des festverzinslichen Bonds muss so gewählt sein, dass beie Produkte den gleichen Wert haben:

$$\boxed{\underbrace{B_t(c,T)}_{\text{Wert eines Coupon-Bonds}} \stackrel{!}{=} \underbrace{N}_{\text{Wert einer FRN}}}$$

- Wähle c so dass die NA-Bedingung erfüllt ist:

$$N \stackrel{!}{=} \sum_{s=t+1}^{T} cNB_t(s) + NB_t(T)$$

$$\Rightarrow 1 \stackrel{!}{=} \sum_{s=t+1}^{T} cB_t(s) + B_t(T)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1 - B_t(T)}{\sum_{s=t+1}^{T} B_t(s)} \qquad \text{par swap rate}$$

- Eine Swaption ist eine Option auf den Kauf (Call) oder Verkauf (Put) eines Swaps.

Bondoptionen

- Optionen mit Fälligkeit in T_1 auf Zero-Bond mit Fälligkeit in $T_2 \geq T_1$:

$$
\begin{aligned}
C_{T_1}(B_{T_1}(T_2)) &= (B_{T_1}(T_2) - K)^+ \\
P_{T_1}(B_{T_1}(T_2)) &= (K - B_{T_1}(T_2))^+
\end{aligned}
$$

- Put-Call-Parität für Europäische Bondoptionen:

$$
\begin{aligned}
P_{T_1} &= C_{T_1} - B_{T_1}(T_2) + K \\
\Rightarrow \boxed{P_t = C_t - B_t(T_2) + KB_t(T_1)}
\end{aligned}
$$

e^{-rT}

$\hat{=} B_t(T_1)$

$P = C - S + Ke^{-rT}$

Zinsoptionen

- Zinsoptionen lösen eine Zahlung bei Überschreitung (Caplet) oder Unterschreitung (Floorlet) von festgelegten Zinsgrenzen eine Zinszahlung aus.
- Caplet mit Laufzeit τ und Strike L_C hat Payoff in τ:

$$(L_{\tau-1} - \underbrace{L_C}_{\text{strike rate}})^+ \hat{=} \text{Call}$$

$$(L_F - L_{\tau-1})^+ \hat{=} \text{Put}$$

- Cap: Portfolio von Caplets mit identischen Strikes aber unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten
  $\Rightarrow$ Sichert gegen steigende Zinsen ab.
- Floor: Portfolio von Floorlets mit Payoffs $(L_F - L_{\tau-1})^+$
  $\Rightarrow$ Sichert gegen fallende Zinsen ab.
- Exotische Produkte wie Captions, Floortions (Optionen auf Zinsoptionen) sind ebenfalls möglich.

▷ Portfolio aus Caplet long, Floorlet short

$$\max(L_{\tau-1} - \bar{L}; 0) - \max(\bar{L} - L_{\tau-1}; 0)$$

$$= \max(L_{\tau-1}; \bar{L}) - \bar{L} - \max(\bar{L}; L_{\tau-1}) + L_{\tau-1}$$

$$= L_{\tau-1} - \bar{L} \longrightarrow \text{1 periodigen Payer swap.}$$

Inhaltsverzeichnis

S_0 — $S_0(1+u)$, $S_0(1+d)$

Zero-Bond-Preis

- Idee ähnlich wie bei CRR: Binomialmodell für die Discountfaktoren
- Aber: Bond-Preise sind schwierig zu modellieren
  - Deterministischer Payoff am Ende der Laufzeit
  - Volatilität der Bondpreise muss abnehmen für $t \to T$ (bei Aktien: konstant oder zustandsabhängig)
  - Folgerung: Benötigen verschiedene Volatilitäten für Bonds mit verschiedenen Laufzeiten

$B_T(T) = 1$

- Modelliere die Dynamiken der Diskontfaktoren

i = # Kursanstiege im Modell

$B_{t+1}^{(i+1)}(t+3)$ zweijährige Bond
$B_{t+1}^{(i+1)}(t+2)$ einjährige Bond
$B_{t+1}^{(i+1)}(t+1) = 1$

$B_{t}^{(i)}(t+3)$
$B_{t}^{(i)}(t+2)$
$B_{t}^{(i)}(t+1)$

$B_{t+1}^{(i)}(t+3)$
$B_{t+1}^{(i)}(t+2)$
$B_{t+1}^{(i)}(t+1)$

- Wie modelliert man Zinsrisiken?
- Ohne Zinsänderungsrisiko:
  - Zukünftige Kassazinssätze *immer* identisch zu den heutigen Terminzinssätzen
  - Zukünftige Bond-Preise *immer* identisch zu den heutigen Terminpreisen
  - Folgerung:

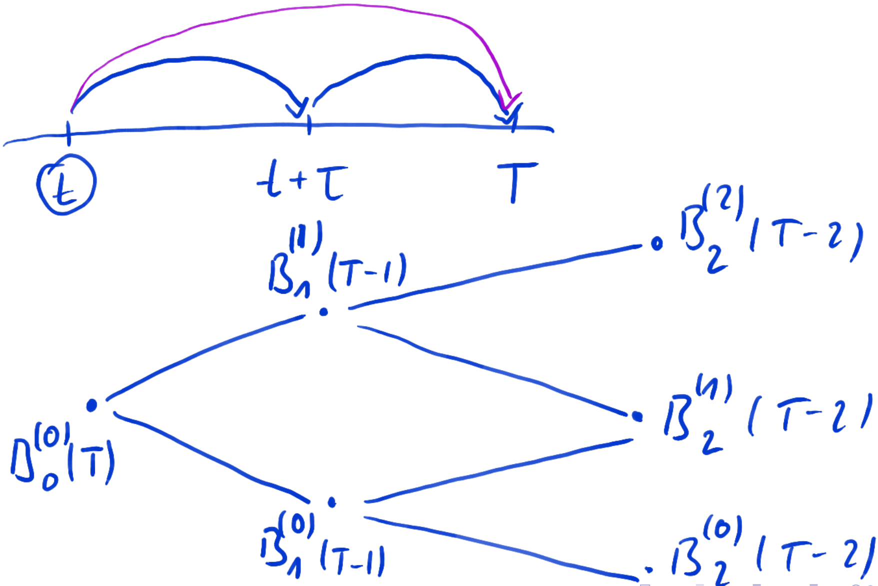
$B_t(t+\tau) \; B_{t+\tau}(T) = B_t(T)$

$$\boxed{B_{t+\tau}(T) = \frac{B_t(T)}{B_t(t+\tau)}}$$

für alle Zeiten $t + \tau \leq T$ und in allen Zuständen

- Idee: Nutze eine Pertubationsfunktion. D.h. Kassa-Bond-Preise sind gleich dem Produkt aus Terminpreisen und einer Größe, die Zufall modelliert.

Grundlagen



Grundlagen

- Kassa-Bond-Preise:

$$
\begin{aligned}
① \quad B_{t+1}^{(i+1)}(T) &= \frac{B_t^{(i)}(T)}{B_t^{(i)}(t+1)} h(\overbrace{T-(t+1)}^{\text{Restlaufzeit}}) \\
② \quad B_{t+1}^{(i)}(T) &= \frac{B_t^{(i)}(T)}{B_t^{(i)}(t+1)} h^*(T-(t+1))
\end{aligned}
$$

- $h(T-(t+1))$: Pertubationsfunktion für Bond mit Fälligkeit in $T-(t+1)$ im up-State, d.h. nach dem Kursanstieg
- $h^*(T-(t+1))$: analoge Function für down-State
- Restriktionen an $h(\cdot)$ und $h^*(\cdot)$?

Parameterisierung des Modells

- Offensichtlich: $\boxed{h(0) = h^*(0) = 1}$ (warum?)
- Bewertung mit risikoneutraler Wahrscheinlichkeit q:

$$
\begin{aligned}
q\underbrace{B_{t+1}^{(i+1)}}_{1}(T) + (1-q)\underbrace{B_{t+1}^{(i)}(T)}_{1} &= \frac{B_t^{(i)}(T)}{B_t^{(i)}(t+1)} \\
q\frac{B_t^{(i)}(T)}{B_t^{(i)}(t+1)} h(T-(t+1)) + (1-q)\frac{B_t^{(i)}(T)}{B_t^{(i)}(t+1)} h^*(T-(t+1)) &= \frac{B_t^{(i)}(T)}{B_t^{(i)}(t+1)} \\
\Rightarrow qh(T-(t+1)) + (1-q)h^*(T-(t+1)) &= 1
\end{aligned}
$$

muss für jede Fälligkeit T gelten (warum?)

Parameterisierung des Modells

- Bedingungen:
  - Nichtnegativität
  - Fester Payoff zur Fälligkeit
  - Risikoneutrale Bewertung
  - Pfadunabhängigkeit
- Lösung:

$$\boxed{\begin{aligned} h(\tau) &= \frac{1}{q+(1-q)\delta^\tau} \\ h^*(\tau) &= \frac{\delta^\tau}{q+(1-q)\delta^\tau} \end{aligned}}$$

$0 < \delta \leq 1$: *Spread Parameter*

- $\delta = 1 \Rightarrow h(\tau) = h^*(\tau)$ for all $\tau \Rightarrow$ Zinssicherheit ✓
- Folgerung: Bond Volatilität fällt mit δ

Parameterisierung des Modells

aus Markt durch Beobachtung genommen

- Struktur des Ho-Lee Modells:
  - Diskontfaktoren in $t = 0$: $\boxed{B_0(1), \cdots, B_0(T)}$
  - $q = 0.5$
  - Erstelle mit dem Spread Parameter δ, eine Tabelle für $\boxed{h(\tau)}$ und $\boxed{h^*(\tau)}$ $(\tau = 1, \cdots, T-1)$.
  - Ziehe einen Binomialbaum von 0 zu T auf
- Bewertung von Derivaten, die zu Zeitpunkten $s \leq T$ fällig werden
  - Bestimme den Payoff in s $C_s^{(i)}$ $(i = 0, \cdots, s)$
  - Rekursion:

$$C_t^{(i)} = B_t^{(i)}(t+1)[\underbrace{qC_{t+1}^{(i+1)} + (1-q)C_{t+1}^{(i)}}]$$

$(t = s-1, \cdots, 0, i = 0, \cdots, t)$

  - Falls Amerikanisches Derivat, prüfe auf vorzeitige Ausübung wie im CRR-Modell.

Beispiel

$$B_0(\tau) = e^{-0.05 \cdot \tau} = e^{-y_0(\tau)\cdot\tau}$$

$$\hookrightarrow \; y_0(\tau) = 5\%$$

- Beispiel:
  - $B_0(\tau) = e^{-0.05\tau}$ $(\tau = 1, 2, 3)$
  - $q = 0.5$
  - $\delta = 0.975$

τ	1	2
$h(\tau)$	1.01265	1.02531
$h^*(\tau)$	0.98735	0.97468

$$h(\tau) = \frac{1}{q + (1-q)\delta^\tau} \qquad h^*(\tau) = \frac{\delta^\tau}{q + (1-q)\delta^\tau} = \delta^\tau \cdot h(\tau)$$

$$h(1) = \frac{1}{0{,}5 + 0.5 \cdot 0.975} = 1.01265$$

$B_0(\tau) = e^{-0.05 \cdot \tau}$

$B_0(1) = 0.9512$
$B_0(2) = 0.9048$
$B_0(3) = 0.8607$

O

$B_1^{(1)}(1) = 1.0000$
$B_1^{(1)}(2) = 0.9632$
$B_1^{(1)}(3) = 0.9277$

U

$B_1^{(0)}(1) = 1.0000$
$B_1^{(0)}(2) = 0.9391$
$B_1^{(0)}(3) = 0.8819$

- Berechnung der Bond-Preise

$$B_1^{(1)}(2) = \frac{B_0(2)}{B_0(1)} h(2-1) = \frac{0.9048}{0.9512} 1.01265 = 0.9632$$

$$B_1^{(0)}(2) = \delta B_1^{(1)}(2) = 0.9391$$

Beispiel

- Analog:

$$B_1^{(1)}(3) = \frac{B_0(3)}{B_0(1)} h(2) = 0.9277$$
$$B_1^{(0)}(3) = \delta^2 B_1^{(1)}(3) = 0.8819$$

- Oberer Knoten in $t = 1$:

O
$$B_2^{(2)}(3) = \frac{0.9277}{0.9632} 1.01265 = 0.9753$$
$$B_2^{(1)}(3) = 0.975 \cdot 0.9753 = 0.9509$$

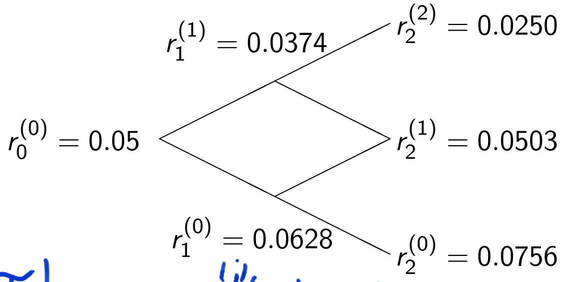
- Unterer Knoten in $t = 1$:

U
$$B_2^{(0)}(3) = \frac{0.8819}{0.9391} 0.98735 = 0.9272$$

Beispiel

diskret: $\frac{1}{1+r_t^{(i)}}$

- Momentanzins: $\boxed{B_t^{(i)}(t+1) = e^{-r_t^{(i)}}} \Leftrightarrow r_t^{(i)} = -\ln B_t^{(i)}(t+1)$

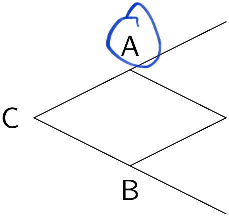


$$B_t^{(i)}(t+\tau) = e^{-r_t^{(i)}(\tau)\cdot\tau}$$

$$r_t^{(i)}(\tau) = -\frac{1}{\tau}\ln(B_t^{(i)}(t+\tau))$$

Beispiel

- Europäische Put-Option (Fälligkeit in $\boxed{T_1 = 2}$) auf Zero-Coupon Bond (Fälligkeit in $\boxed{T_2 = 3}$) mit Strike-Preis 0.96:



$$\max(0.96 - B_2^{(2)}(3), 0) = 0.0000$$

$$\max(0.96 - B_2^{(1)}(3), 0) = 0.0091$$

$$\max(0.96 - B_2^{(0)}(3), 0) = 0.0328$$

Beispiel

- Bewertung der Option:
  - Knoten A:

$$[0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.0091] \cdot \overbrace{0.9632}^{B_1^{(1)}(2)} = \underline{0.00433}$$

  - Knoten B:

$$[0.5 \cdot 0.0091 + 0.5 \cdot 0.0328] \cdot \overbrace{0.9391}^{B_1^{(0)}(2)} = \underline{0.0197}$$

  - Knoten C:

$$[0.5 \cdot 0.00433 + 0.5 \cdot 0.0197] \cdot \overbrace{0.9512}^{B_0^{(0)}(1) = e^{-0.05}} = 0.0114$$