

# Teil V

## Black-Scholes-Modell

16 Black-Scholes Optionspreisformel

17 Preissensitivitäten – Die Griechen

# Black-Scholes-Modell

- Mathematisch anspruchsvolles Modell in stetiger Zeit

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$

- $W_t$  Wiener Prozess; normalverteilte Renditen
- Interpretation für "kleinen" Zeitschritt  $\Delta t$

$$S_{t+\Delta t} - S_t = S_t \mu \Delta t + S_t \sigma \underbrace{(W_{t+\Delta t} - W_t)}_{\sim \mathcal{N}(0, \Delta t)}$$

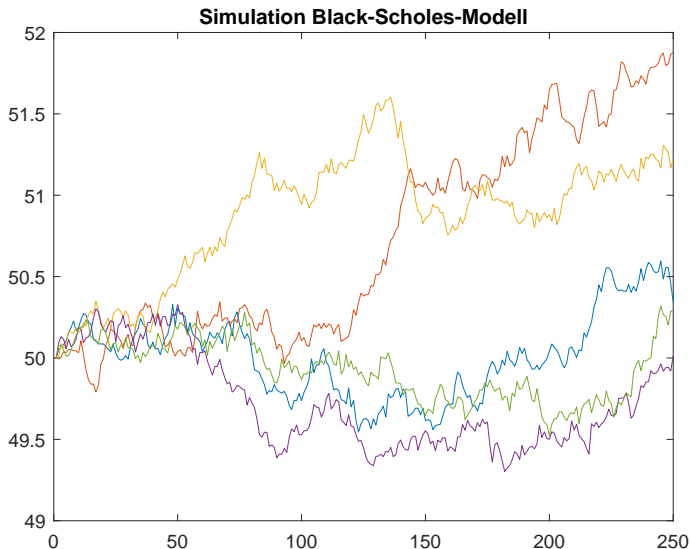
oder

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \underbrace{\mu \Delta t}_{\text{det.}} + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t + \underbrace{\sigma (W_{t+\Delta t} - W_t)}_{\sim \mathcal{N}(0, \Delta t)}$$

Stochastisch

- Idee: Starte mit einem Binomialmodell und erhöhe die Anzahl der Zeitschritte in  $[0, T]$ .
- Der Grenzwert dieser immer feineren Binomialmodelle konvergiert gegen das zeitstetige Black-Scholes Modell.

# Simulation des Black-Scholes-Modells



# Black-Scholes-Formel

Im Grenzwert konvergiert die Optionspreisformel des Binomialmodells

$$C_0 = S_0 B(T, \tilde{q}; a) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, q; a)$$

gegen die

## Black-Scholes Formel

Der Preis einer europäischen Call-Option im Black-Scholes Modell ist

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

$\mu?$

wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bemerkung: In vielen Lehrbüchern wird die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung mit  $N$  bezeichnet.

# Herleitung der Formel

- Wir starten mit der Optionspreisformel des Binomialmodells

$$C_0 = S_0 \underbrace{B(T; \tilde{q}, a)}_{P^{\tilde{Q}}(S_T \geq K)} - \frac{K}{(1+r)^T} \underbrace{B(T; q, a)}_{P^Q(S_T \geq K)}$$

$\Phi(d_2)$

und schreiben den Binomialprozess bezüglich des logarithmierten Aktienkurses

$$\ln S_{t+1} = \ln S_t + \begin{cases} \ln(1+u) & \text{probability } q \\ \ln(1+d) & \text{probability } 1-q \end{cases}$$

- Der log-Aktienpreis ist damit additiv.

# Herleitung der Formel

- Gegeben sei die Volatilität  $\sigma$  der Renditen. Ausgehend von dem Cox-Ross-Rubinstein Binomial-Modell erhält man

$$\begin{aligned} 1 + u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ 1 + d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\ln(1+u) \\ &= -\ln(1+d) \end{aligned}$$

- Volatilität  $\sigma$ : Standardabweichung der log Renditen  $\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t$
- Betrachte den log-Aktienkurs nach  $n$  Schritten mit  $i$  Kursanstiegen:

$$\begin{aligned} \ln S_{n\Delta t}^{(i)} &= \ln S_0 + i \cdot \ln(1+u) + (n-i) \cdot \ln(1+d) \\ &= \ln S_0 + i \cdot \ln(1+u) - (n-i) \cdot \ln(1+u) \\ &= \ln S_0 + (2i-n) \cdot \ln(1+u) \\ &= \ln S_0 + (2i-n)\sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\text{Std} = \sqrt{\text{Varianz}}$$

- Man kann zeigen, dass für  $n \rightarrow \infty$  (äquivalent  $\Delta t \rightarrow 0$ ):

- unter  $\mathbb{Q}$ :

$$\ln S_T \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T; \sigma^2 T\right)$$

- unter  $\tilde{\mathbb{Q}}$ :

$$\ln S_T \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T; \sigma^2 T\right)$$

- Allgemeine Optionspreisformel gilt auch für Cox-Ross-Rubinstein, im Grenzwert auch für Black-Scholes.
- Wir müssen daher Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten  $P^{\tilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K)$  und  $P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K)$  finden.

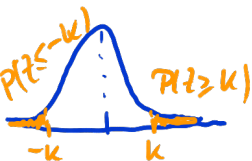


# Wiederholung: Normalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\underbrace{Z}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$



$$= \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}(Z \leq -k)$$

# Herleitung der Formel

- Offensichtlich gilt  $P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) = P^{\mathbb{Q}}(\ln S_T \geq \ln K)$  und analog für  $P^{\tilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K)$ .
- Daher:

$$P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) = P^{\mathbb{Q}}(\ln S_T \geq \ln K) = P^{\mathbb{Q}}\left(\underbrace{\frac{\ln S_T - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}}_{z \sim \mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{\ln K - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}\right)$$

- Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ :  $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ :

$$P^{\mathbb{Q}}(\ln S_T \geq \ln K) = P^{\mathbb{Q}}\left(z \leq \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T] - \ln K}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}\right) = \Phi\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T] - \ln K}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}\right)$$

# Herleitung der Formel

- Nun gilt

$$\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T] - \ln K}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln S_0 - \ln K + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und

$$P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) = \Phi(d_2)$$

- Analog für  $\tilde{\mathbb{Q}}$ :

$$P^{\tilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K) = \Phi(d_1) \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

mit  $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$

- Daraus folgt der Preis für die Call-Option

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

diskret

$$\frac{S_{t+1/12} - S_{t-1/12}}{S_{t+1/12}}$$

- Historische Volatilität: Berechnet als Standardabweichung der log Renditen
- Beispiel: Monatliche Aktienkurse über  $N$  Monate  
 $S_0, S_{1/12}, S_{2/12}, \dots, S_{N/12}$ 
  - 1 Berechne monatliche log Renditen  $\ln S_{t/12} - \ln S_{(t-1)/12}$  for  $t = 1, \dots, N$
  - 2 Berechne Standardabweichung der monatlichen log Renditen  $\hat{\sigma}_{1/12}$
  - 3 Annualisiere durch Multiplikation mit  $\sqrt{12}$ , d.h.  $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{12}\hat{\sigma}_{1/12}$
- Analog für tägliche und wöchentliche Renditen (multipliziere mit  $\sqrt{252}$  bzw.  $\sqrt{52}$ )

# Amerikanische Optionen

- Black-Scholes Formel ist kompakt und elegant, aber nicht anwendbar auf amerikanische oder exotische Optionen
- Link zwischen CRR und Black-Scholes Modell

$$\begin{aligned}1 + \mu &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\1 + d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\1 + r &= e^{r\Delta t}\end{aligned}$$
$$\Rightarrow q = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$
$$q = \frac{r - d}{u - d}$$

- Erzeuge einen Binomialbaum aus  $u$ ,  $d$ ,  $r$  und  $q$  und bewerte amerikanische oder exotische Optionen
- Ist diese Approximation gut? ja!

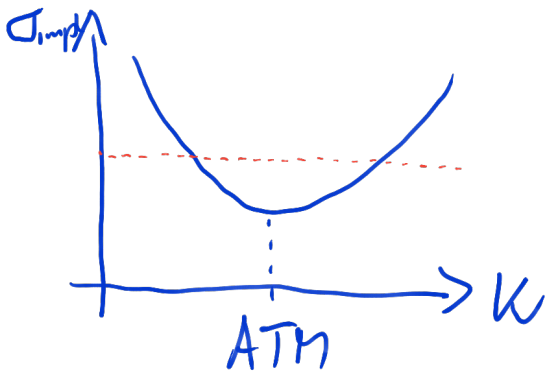
- Berechne Black-Scholes Preis einer europäischen Option.
- Berechne Preis aus einem CRR-Modell mit  $\Delta t = T/N$  und erhöhe  $N$ .

Alternativen:  
Finite Differenzen, MC-Simulation

- Volatilität, Zins, erwartete Rendite werden als konstant angenommen.
- Renditen werden als normalverteilt angenommen und unterschätzen dabei das Auftreten von Extremereignissen.  $\Rightarrow$  Volatility Smile
- Modell geht von einem vollständigen Markt ohne Friktionen aus (keine Leerverkaufsbeschränkungen, Steuern, Transaktionskosten)
- Implizite Volatilitäten  $\neq$  Historische Volatilitäten
  - Diese Einschränkungen des Black-Scholes-Modells zeigen sich bei den gehandelten Preisen von Optionen, wenn man die durch die Optionspreise implizierten Volatilitäten betrachtet.
  - Die implizite Volatilität für eine Option auf einen bestimmten Basiswert ist nicht konstant, sondern ändert sich im Zeitablauf.
  - Zudem hängt die implizite Volatilität für einen bestimmten Zeitpunkt von der Geldnähe ab (Volatility Smile)

# Volatility Smile

$$C^{\text{real}} = S_0 \cdot \Phi(d_1(S_0, K, r, T, \sigma)) - K r^{-r(T-t)} \Phi(d_2(S_0, K, r, T, \sigma))$$



VIX  
VDAX

16 Black-Scholes Optionspreisformel

17 Preissensitivitäten – Die Griechen



- 'Griechen': Preissensitivitäten bzgl. der Inputfaktoren
  - wichtig im Risikomanagement wichtig.
  - Schätzen den Einfluss einzelner Risikofaktoren auf das Gesamtportfolio ab
- Black-Scholes Formel:

$$C = C(\underbrace{S}_{\Delta, \Gamma}, K, \underbrace{r}_{\rho}, \underbrace{T}_{\Theta}, \underbrace{\sigma}_{\text{vega}})$$

- $\Delta$ : Sensitivität bzgl. dem Preis des Underlyings

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$$

# Aktien im Replicationsportfolio

- Man beachte:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-rT} \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

# Delta $\Delta$

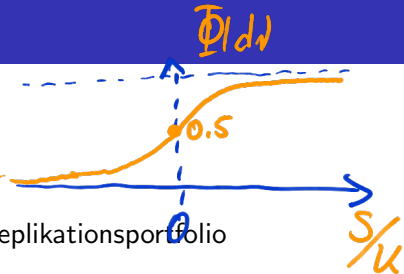
$$C = S \cdot \Phi(d_1(S, \dots)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(S, \dots))$$

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S \cdot \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \cdot \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

= ...

$$= \Phi(d_1)$$

- 
- Binomial Modell:  $\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$
  - Interpretation: Anzahl der Aktien im Replikationsportfolio
  - Im Grenzwert:  $\frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$
  - $\Phi(d_1)$  ist die Anzahl der Aktien im Replikationsportfolio in stetiger Zeit!
  - Approximation für at-the-money Optionen, d.h.  $S_0 \approx K$ :

$$\Phi(d_1) = \Delta \approx 0.5$$

- $\Delta = 0.5$  falls  $\Phi(d_1) = 0.5$ , d.h. falls  $d_1 = 0 \Leftrightarrow S_0 = Ke^{-(r+1/2\sigma^2)T}$

$$d_1 = \frac{\ln(S/u) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0$$

- Approximation für deep in-the-money Call-Optionen, d.h.  $S_0 \gg K$ :

$$\Delta_C \approx 1,$$

$$C \geq S - Ke^{-r(T-t)}$$

$$C \rightarrow S - Ke^{-r(T-t)}$$

da  $\Phi(d_1) \rightarrow 1$  für  $S_0/K \rightarrow \infty$

- Approximation für deep out-of-the-money Call-Optionen, d.h.

$S_0 \ll K$ :

$$\Delta_C \approx 0,$$

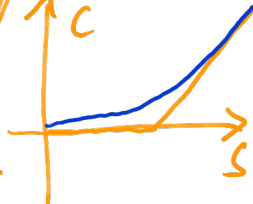
für "große" Abweichung

da  $\Phi(d_1) \rightarrow 0$  für  $S_0/K \rightarrow 0$  (d.h.  $d_1 \rightarrow -\infty$ )

- Put Delta  $\Rightarrow$  Put-Call-Parität!

$$P = C - S_0 + Ke^{-rT}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial S} \right.$$



- Für den Put gilt daher  $\Delta_P = \Delta_C - 1$

$$P = \underbrace{S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)}_C - S + Ke^{-rT}$$

- Daraus folgt für das Put-Delta:

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - 1$$

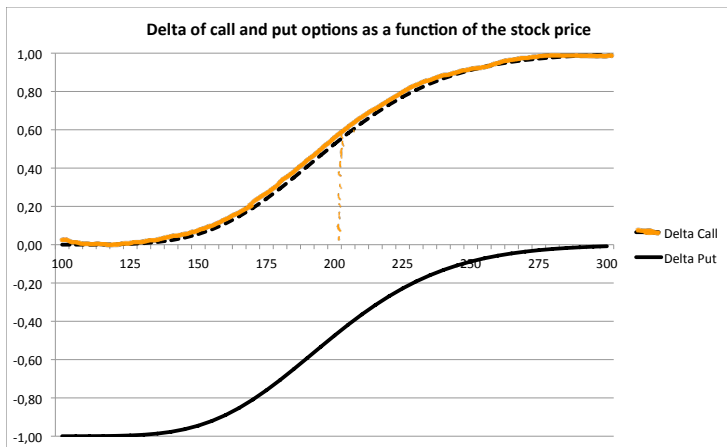
$\Delta_C \in (0, 1] \Rightarrow \Delta_P = \Delta_C - 1$

- Implikation:  $\Delta_P \in [-1; 0]$
- Approximation für deep out-of-the-money Put-Optionen, d.h.  $S_0 \gg K$ :

$$\Delta_P \approx 0,$$

- Approximation für deep in-the-money Put-Optionen, d.h.  $S_0 \ll K$ :

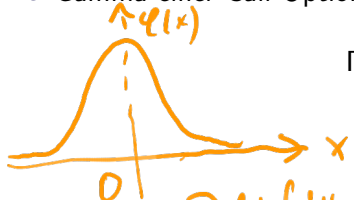
$$\Delta_P \approx -1,$$



- Data:  $K = 210$ ,  $r = 0.06$ ,  $\tau = T - t = 0.75$ ,  $\sigma = 0.2$

# Gamma $\Gamma$

- Gamma einer Call-Option:



Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz$$

$$\begin{aligned}\Gamma_C &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\ &= \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} \\ &= \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} \\ &= \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} \\ &= \phi(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \\ &> 0.\end{aligned}$$

Verteilungsfunktion

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \dots}{\sigma\sqrt{T}}$$

- Gamma einer Put-Option:

⇒

$$\Gamma_P = \Gamma_C$$

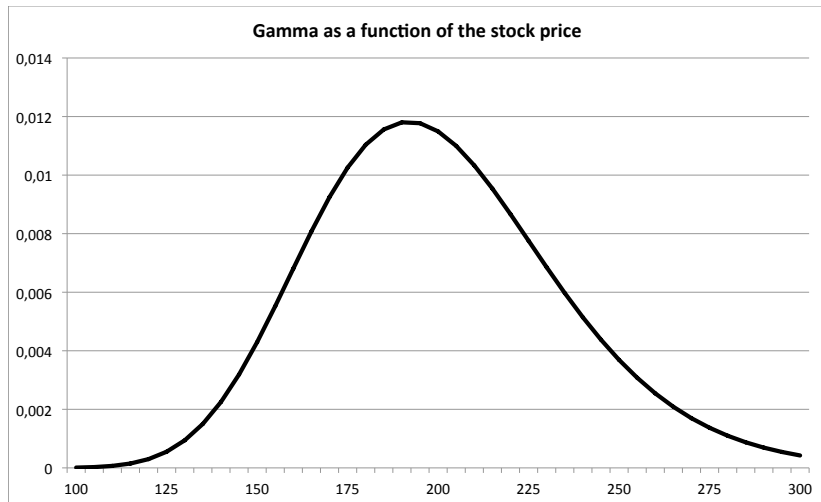
PC-Anheit

$$\Delta_P = \Delta_C - 1$$

Warum?

- Wann ist das  $\Gamma$  groß? Wann ist es niedrig?
- deep ITM und OTM Optionen ( $S_0 \gg K$  oder  $S_0 \ll K$ ):  $\Delta$  ist relativ flach, d.h. eine kleine Änderung des Aktienkurses hat fast keinen Einfluss auf das  $\Delta \Rightarrow \Gamma \approx 0$  ✓
- ATM Optionen ( $S_0 = K$ ):  $\Delta$  ist relativ steil, d.h. eine kleine Änderung des Aktienkurses hat einen großen Einfluss auf das  $\Delta$
- Extrembeispiel: ATM Call-Option unmittelbar vor Fälligkeit
  - Aktienkurs steigt minimal: Positiver Payoff bei Fälligkeit
  - Aktienkurs fällt minimal: Option verfällt





# Theta $\theta$

- Theta ( $t$ : Zeit,  $\tau = T - t$ : Restlaufzeit):

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau}$$
$$\Rightarrow \theta_C = \frac{\partial C}{\partial t}$$
$$= -\frac{S_t \phi(d_1) \sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)} \phi(d_2)$$
$$< 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} > 0$$

D.h. je länger die Restlaufzeit, desto höher der Call-Preis.

- Theta einer Put-Option:  $P = C - S_0 + K \cdot e^{-r(T-t)}$

$$\theta_P = \underbrace{\theta_C}_{< 0} + \underbrace{rKe^{-r(T-t)}}_{> 0} \geq 0$$

- Deep ITM Put-Option ( $S_0 \approx 0$ )  $\Rightarrow \theta_P > 0$  (je kürzer die Restlaufzeit, desto teurer der europäische ITM Put)
- Deep OTM Put-Option ( $S_0 \gg K$ )  $\Rightarrow \theta_P < 0$

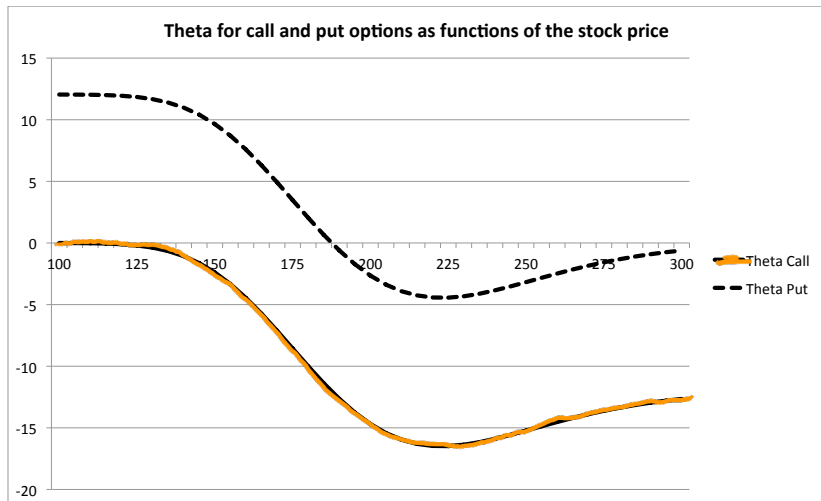
# Theta $\theta$

$$\boxed{i.A.} \quad C = S \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \theta_C = \underbrace{S \cdot \varphi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial t}}_{\text{Term 1}} - \underbrace{r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)}_{\text{Term 2}} - \underbrace{K e^{-r(T-t)} \varphi(d_2) \cdot \frac{\partial d_2}{\partial t}}_{\text{Term 3}}$$

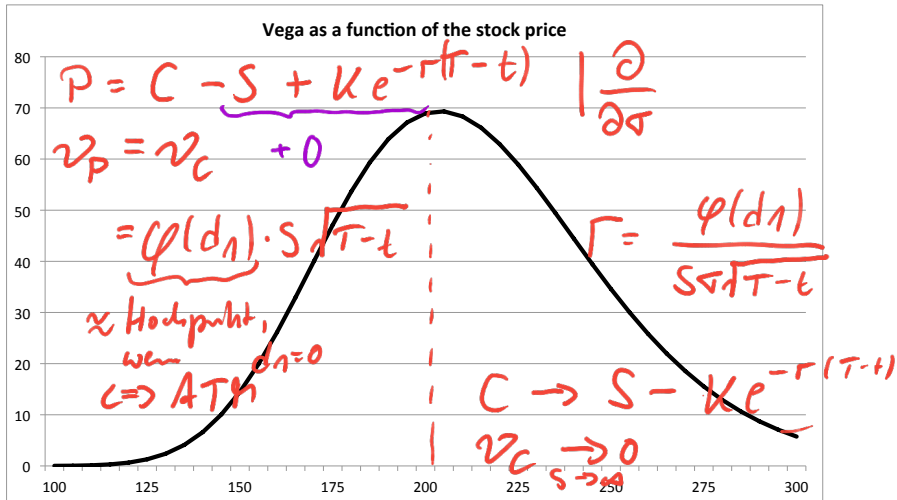
$$\text{DITM Call-Option: } C \rightarrow S - K e^{-r(T-t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} : - K r e^{-r(T-t)}$$



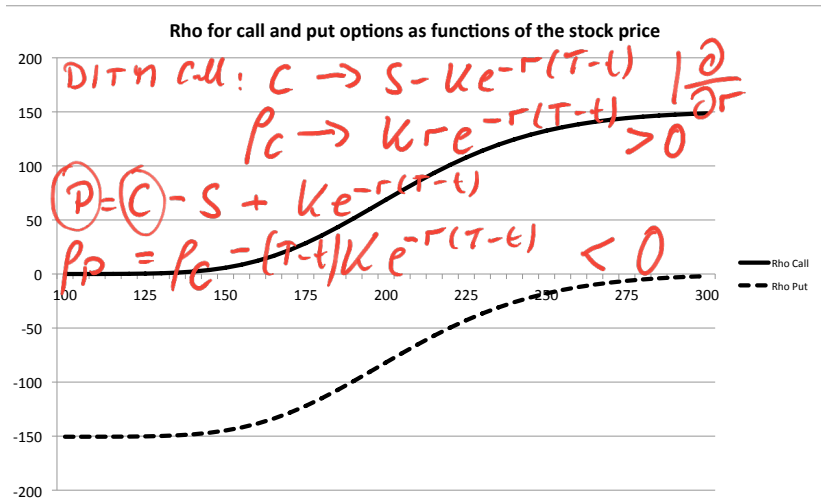
# Vega $\nu$

Vega: Sensitivität bzgl. Volatilität ( $\nu_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \nu_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma} > 0$ )



# Rho $\rho$

Rho: Sensitivität bzgl. risikofreiem Zins ( $\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r}$ ,  $\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r}$ )



# Zusammenfassung

Optionspreise von Europäischen Optionen:

$\delta$ : stetige Dividendenrate

$$C = Se^{-\delta\tau} \Phi(d_1) - Ke^{-r\tau} \Phi(d_2)$$

$$P = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - Se^{-\delta\tau} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$\tau$ : Restlaufzeit ( $\tau = T - t$ )

Griechen	Formel
$\Delta$	$\epsilon e^{-\delta\tau} \Phi(\epsilon d_1)$
$\Gamma$	$e^{-\delta\tau} \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
$\nu$	$e^{-\delta\tau} \phi(d_1) S\sqrt{\tau}$
$\Theta$	$-e^{-\delta\tau} \frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + \epsilon [-rKe^{-r\tau} \Phi(\epsilon d_2) + \delta Se^{-\delta\tau} \Phi(\epsilon d_1)]$

$\epsilon = 1$  für Calls,  $\epsilon = -1$  für Puts

- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ : Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
- $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(z) dz$ : Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

- Für den Wert  $\Pi$  eines Portfolios bestehend aus  $n$  Papieren gilt:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \varphi_i C_i$$

$\varphi_i = \#$  Wertpapiere  
von Typ  $i$

- Ableitungen sind linear!
- Portfolio Griechen:

$C_i =$  Preis des  
Wertpapiers  
von Typ  $i$

$$\begin{aligned}\Delta_{\Pi} &= \frac{\partial \Pi}{\partial S} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial C_i}{\partial S} \\ \Rightarrow \Delta_{\Pi} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \Delta_i \\ \Rightarrow \Gamma_{\Pi} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \Gamma_i\end{aligned}$$

und so weiter...



# Dynamisches Hedging

- Hedging mit Griechen: Aktienpreis  $S_0$  Was passiert bei einer Kursveränderung zu  $S$

⇒  $\Delta$ -Hedging:

$$C(S) \approx C(S_0) + \frac{\partial C}{\partial S} \Big|_{S=S_0} (S - S_0)$$

*Taylor - Entwicklung*

*$\Delta C$  Änderung d. Aktienkurs*

⇒  $\Delta$ - $\Gamma$ -Hedging:

$$C(S) \approx C(S_0) + \frac{\partial C}{\partial S} \Big|_{S=S_0} (S - S_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Big|_{S=S_0} (S - S_0)^2$$

- Neutralität: Portfolio-Sensitivitäten sind gleich null:

- $\Delta$ -Neutralität  $\Leftrightarrow \Delta_{\Pi} = 0$
- $\Gamma$ -Neutralität  $\Leftrightarrow \Gamma_{\Pi} = 0$
- $\Delta$ - $\Gamma$ -Neutralität:  $\Leftrightarrow \Delta_{\Pi} = \Gamma_{\Pi} = 0$

*→ Binomialmodell*

- Wie erzielt man  $\Delta$ - $\Gamma$ -Neutralität bei einem Portfolio bestehend aus  $\varphi_1$  Einheiten des Derivates  $C_1$ ?

$$\begin{aligned}\varphi_2 \Delta_2 + \varphi_3 \Delta_3 &\stackrel{!}{=} \varphi_1 \Delta_1 \\ \varphi_2 \Gamma_2 + \varphi_3 \Gamma_3 &\stackrel{!}{=} \varphi_1 \Gamma_1\end{aligned}$$

- Auch auf alle anderen Griechen anwendbar.
- Dynamisches Hedging: Analog zum Binomialmodell
- Passe das Portfolio an, um die Position mit Option und Underlying  $\Delta$ -neutral zu halten, akkumuliere die Position im Hedge-Account
- Problem: Aktienkurs ändert sich *stetig* im Black-Scholes-Modell, aber Hedge kann nur zu *diskreten* Zeitpunkten angepasst werden  $\rightarrow$  *Hedging Error!*

# Dynamisches Hedging

- Hedging-Error reduziert sich, bei steigender Anzahl der Portfolioumstrukturierungen

