Teil V

Black-Scholes-Modell

Inhaltsverzeichnis

Black-Scholes-Modell

- Mathematisch anspruchsvolles Modell in stetiger Zeit

$$\mathrm{d}S_t = S_t \mu \mathrm{d}t + S_t \sigma \mathrm{d}W_t$$

- W_t Wiener Prozess; normalverteilte Renditen
- Interpretation für “kleinen” Zeitschritt Δt

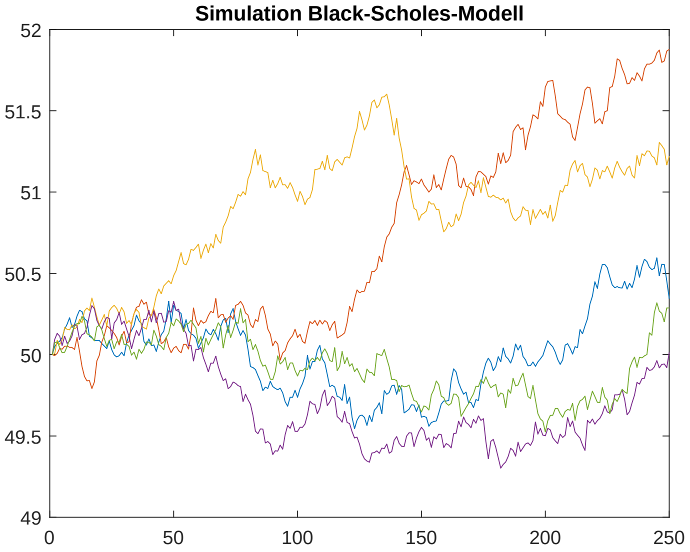
$$S_{t+\Delta t} - S_t = S_t \mu \Delta t + S_t \sigma \underbrace{\left(W_{t+\Delta t} - W_t\right)}_{\sim \mathcal{N}(0,\Delta t)}$$

oder

$$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \mu \Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + \sigma \underbrace{\left(W_{t+\Delta t} - W_t\right)}_{\sim \mathcal{N}(0,\Delta t)}$$

- Idee: Starte mit einem Binomialmodell und erhöhe die Anzahl der Zeitschritte in $[0, T]$.
- Der Grenzwert dieser immer feineren Binomialmodelle konvergiert gegen das zeitstetige Black-Scholes Modell.

Simulation des Black-Scholes-Modells



Black-Scholes-Formel

Im Grenzwert konvergiert die Optionspreisformel des Binomialmodells

$$C_0 = S_0 B(T, \tilde{q}; a) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, q; a)$$

gegen die

Black-Scholes Formel

Der Preis einer europäischen Call-Option im Black-Scholes Modell ist

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T}, \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung beziechnet.

Bemerkung: In vielen Lehrbüchern wird die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung mit N bezeichnet.

Herleitung der Formel

- Wir starten mit der Optionspreisformel des Binomialmodells

$$C_0 = S_0 \underbrace{B(T;\tilde{q},a)}_{P^{\tilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K)} - \frac{K}{(1+r)^T} \underbrace{B(T;q,a)}_{P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K)}$$

und schreiben den Binomialprozess bezüglich des logarithmierten Aktienkurses

$$\ln S_{t+1} = \ln S_t + \begin{cases} \ln(1+u) & \text{probability} \quad q \\ \ln(1+d) & \text{probability} \quad 1-q \end{cases}$$

- Der log-Aktienpreis ist damit additiv.

Herleitung der Formel

- Gegeben sei die Volatilität σ der Renditen. Ausgehend von dem Cox-Ross-Rubinstein Binomial-Modell erhält man

$$\begin{aligned} 1+u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ 1+d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

- Volatilität σ: Standardabweichung der log Renditen $\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t$
- Betrachte den log-Aktienkurs nach n Schritten mit i Kursanstiegen:

$$\begin{aligned} \ln S_{n\Delta t}^{(i)} &= \ln S_0 + i \cdot \ln(1+u) + (n-i) \cdot \ln(1+d) \\ &= \ln S_0 + i \cdot \ln(1+u) - (n-i) \cdot \ln(1+u) \\ &= \ln S_0 + (2i-n) \cdot \ln(1+u) \\ &= \ln S_0 + (2i-n)\sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Herleitung der Formel

- Man kann zeigen, dass für $n \to \infty$ (äquivalent $\Delta t \to 0$):
  - unter $\mathbb{Q}$:
$$\ln S_T \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T; \sigma^2 T\right)$$
  - unter $\widetilde{\mathbb{Q}}$:
$$\ln S_T \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T; \sigma^2 T\right)$$
- Allgemeine Optionspreisformel gilt auch für Cox-Ross-Rubinstein, im Grenzwert auch für Black-Scholes.
- Wir müssen daher Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten $P^{\widetilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K)$ und $P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K)$ finden.

Wiederholung: Normalverteilung

Herleitung der Formel

- Offensichtlich gilt $P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) = P^{\mathbb{Q}}(\ln S_T \geq \ln K)$ und analog für $P^{\widetilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K)$.
- Daher:

$$P^{\mathbb{Q}}(\ln S_T \geq \ln K) = P^{\mathbb{Q}}\left(\underbrace{\frac{\ln S_T - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}}_{z} \geq \frac{\ln K - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}\right)$$

- Im Grenzwert $n \to \infty$: $z \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned} P^{\mathbb{Q}}(\ln S_T \geq \ln K) &= P^{\mathbb{Q}}\left(z \leq \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T] - \ln K}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}\right) \\ &= N\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T] - \ln K}{\sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T]}}\right) \end{aligned}$$

Herleitung der Formel

- Nun gilt

$$\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln S_T] - \ln K}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln S_0 - \ln K + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv d_2,$$

  und

$$P^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) = \Phi(d_2)$$

- Analog für $\widetilde{\mathbb{Q}}$:

$$P^{\widetilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K) = \Phi(d_1)$$

  mit $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$

- Daraus folgt der Preis für die Call-Option

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

Volatilität

- Historische Volatilität: Berechnet als Standardabweichung der log Renditen
- Beispiel: Monatliche Aktienkurse über N Monate $S_0, S_{1/12}, S_{2/12}, \cdots, S_{N/12}$
  1. Berechne monatliche log Renditen $\ln S_{t/12} - \ln S_{(t-1)/12}$ for $t = 1, \ldots, N$
  2. Berechne Standardabweichung der monatlichen log Renditen $\hat{\sigma}_{1/12}$
  3. Annualisiere durch Multiplikation mit $\sqrt{12}$, d.h. $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{12}\hat{\sigma}_{1/12}$
- Analog für tägliche und wöchentliche Renditen (multipliziere mit $\sqrt{252}$ bzw. $\sqrt{52}$)

Amerikanische Optionen

- Black-Scholes Formel ist kompakt und elegant, aber nicht anwendbar auf amerikanische oder exotische Optionen
- Link zwischen CRR und Black-Scholes Modell

$$
\begin{aligned}
1+u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
1+d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
1+r &= e^{r\Delta t} \\
\Rightarrow q &= \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}
\end{aligned}
$$

- Erzeuge einen Binomialbaum aus u, d, r und q und bewerte amerikanische oder exotische Optionen
- Ist diese Approximation gut? ja!
  - Berechne Black-Scholes Preis einer europäischen Option.
  - Berechne Preis aus einem CRR-Modell mit $\Delta t = T/N$ und erhöhe N.

Kritische Würdigung

- Volatilität, Zins, erwartete Rendite werden als konstant angenommen.
- Renditen werden als normalverteilt angenommen und unterschätzen dabei das Auftreten von Extremereignissen. $\Rightarrow$ Volatility Smile
- Modell geht von einem vollständigen Markt ohne Friktionen aus (keine Leerverkaufsbeschränkungen, Steuern, Transaktionskosten)
- Implizite Volatilitäten $\neq$ Historische Volatilitäten
  - Diese Einschränkungen des Black-Scholes-Modells zeigen sich bei den gehandelten Preisen von Optionen, wenn man die durch die Optionspreise implizierten Volatilitäten betrachtet.
  - Die implizite Volatilität für eine Option auf einen bestimmten Basiswert ist nicht konstant, sondern ändert sich im Zeitablauf.
  - Zudem hängt die implizite Volatilität für einen bestimmten Zeitpunkt von der Geldnähe ab (Volatility Smile)

Volatility Smile

Inhaltsverzeichnis

Griechen

- 'Griechen': Preissensitivitäten bzgl. der Inputfaktoren
  - wichtig im Risikomanagement wichtig.
  - Schätzen den Einfluss einzelner Risikofaktoren auf das Gesamtportfolio ab
- Black-Scholes Formel:

$$C = C(\underbrace{S}_{\Delta,\Gamma}, K, \underbrace{r}_{\rho}, \underbrace{T}_{\Theta}, \underbrace{\sigma}_{vega})$$

- Δ: Sensitivität bzgl. dem Preis des Underlyings

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$$

- Man beachte:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-rT}\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Delta Δ

Delta Δ

- Binomial Modell: $\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$
- Interpretation: Anzahl der Aktien im Replikationsportfolio
- Im Grenzwert: $\frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$
- $\Phi(d_1)$ ist die Anzahl der Aktien im Replikationsportfolio in stetiger Zeit!
- Approximation für at-the-money Optionen, d.h. $S_0 \approx K$:

$$\Delta \approx 0.5$$

- $\Delta = 0.5$ falls $\Phi(d_1) = 0.5$, d.h. falls $d_1 = 0 \Leftrightarrow S_0 = Ke^{-(r+1/2\sigma^2)T}$

Delta Δ

- Approximation für deep in-the-money Call-Optionen, d.h. $S_0 \gg K$:

$$\Delta_C \approx 1,$$

da $\Phi(d_1) \to 1$ für $S_0/K \to \infty$

- Approximation für deep out-of-the-money Call-Optionen, d.h. $S_0 \ll K$:

$$\Delta_C \approx 0,$$

da $\Phi(d_1) \to 0$ für $S_0/K \to 0$ (d.h. $d_1 \to -\infty$)

- Put Delta $\Rightarrow$ Put-Call-Parität!

$$P = C - S_0 + Ke^{-rT}$$

- Für den Put gilt daher

$$P = \underbrace{S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)}_{C} - S + Ke^{-rT}$$

Delta Δ

- Daraus folgt für das Put-Delta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial S} &= \frac{\partial C}{\partial S} - 1 \\ \Rightarrow \Delta_P &= \Delta_C - 1 \end{aligned}$$

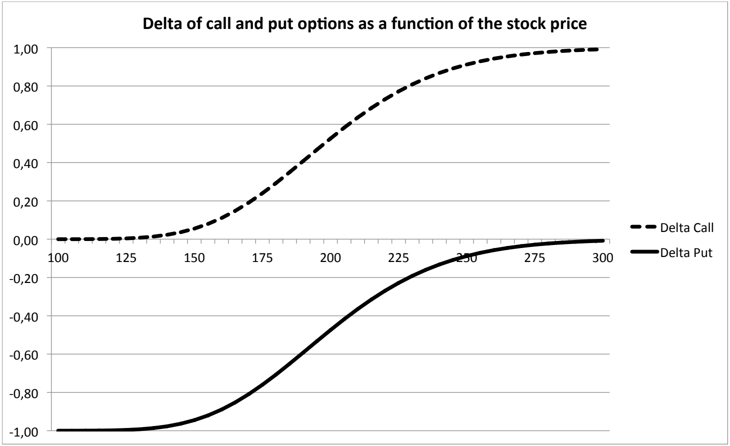
- Implikation: $\Delta_P \in [-1; 0]$
- Approximation für deep out-of-the-money Put-Optionen, d.h. $S_0 \gg K$:

$$\Delta_P \approx 0,$$

- Approximation für deep in-the-money Put-Optionen, d.h. $S_0 \ll K$:

$$\Delta_P \approx -1,$$

Delta Δ



- Data: $K = 210$, $r = 0.06$, $\tau = T - t = 0.75$, $\sigma = 0.2$

Gamma Γ

- Gamma einer Call-Option:

$$\begin{aligned}
\Gamma_C &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\
&= \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} \\
&= \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} \\
&= \phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} \\
&= \phi(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

- Gamma einer Put-Option:

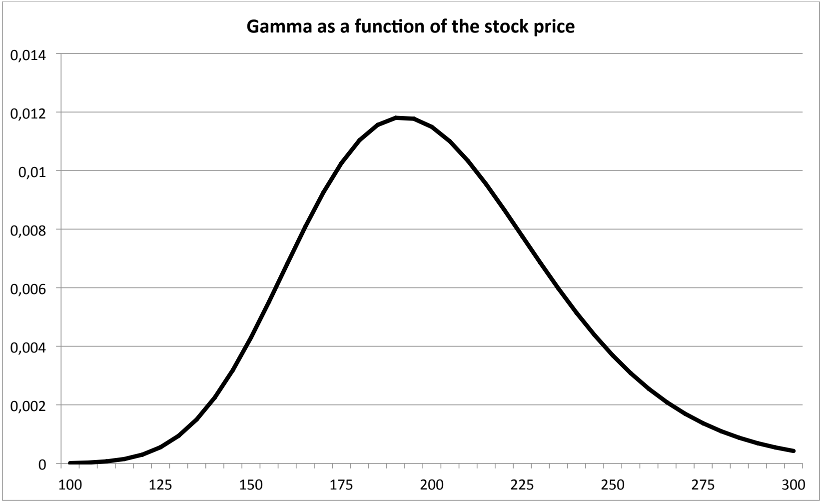
$$\Gamma_P = \Gamma_C$$

Warum?

Gamma Γ

- Wann ist das Γ groß? Wann ist es niedrig?
- deep ITM und OTM Optionen ($S_0 \gg K$ oder $S_0 \ll K$): Δ ist relativ flach, d.h. eine kleine Änderung des Aktienkurses hat fast keinen Einfluss auf das $\Delta \Rightarrow \Gamma \approx 0$
- ATM Optionen ($S_0 = K$): Δ ist relativ steil, d.h. eine kleine Änderung des Aktienkurses hat einen großen Einfluss auf das Δ
- Extrembeispiel: ATM Call-Option unmittelbar vor Fälligkeit
  - Aktienkurs steigt minimal: Positiver Payoff bei Fälligkeit
  - Aktienkurs fällt minimal: Option verfällt

Gamma Γ



Gamma as a function of the stock price
0,014
0,012
0,01
0,008
0,006
0,004
0,002
0
100
125
150
175
200
225
250
275
300

Theta θ

- Theta (t: Zeit, $\tau = T - t$: Restlaufzeit):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{\partial C}{\partial \tau} \\ \Rightarrow \theta_C &= \frac{\partial C}{\partial t} \\ &= -\frac{S_t \phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \\ &< 0 \end{aligned}$$

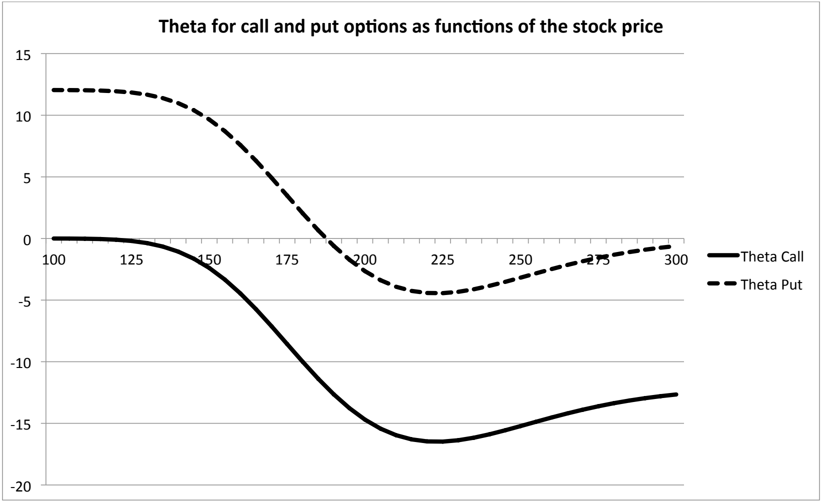
  D.h. je länger die Restlaufzeit, desto höher der Call-Preis.
- Theta einer Put-Option:

$$\theta_P = \theta_C + rKe^{-r(T-t)} \gtrless 0$$

- Deep ITM Put-Option ($S_0 \approx 0$) $\Rightarrow \theta_P > 0$ (je kürzer die Restlaufzeit, desto teurer der europäische ITM Put)
- Deep OTM Put-Option ($S_0 >> K$) $\Rightarrow \theta_P < 0$

Theta θ

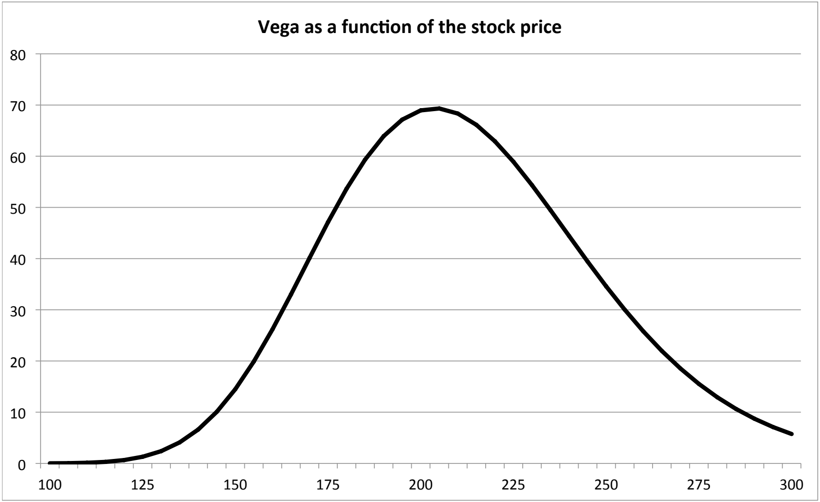
Theta θ



Theta for call and put options as functions of the stock price
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
100
125
150
175
200
225
250
275
300
Theta Call
Theta Put

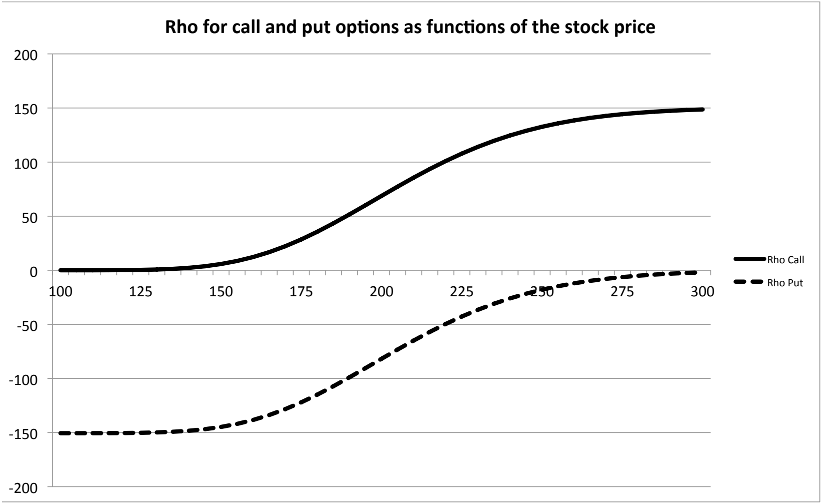
Vega ν

Vega: Sensitivität bzgl. Volatilität $\left(\nu_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \nu_P = \frac{\partial P}{\partial \sigma} > 0\right)$



Rho ρ

Rho: Sensitivität bzgl. risikofreiem Zins $\left(\nu_C = \frac{\partial C}{\partial r}, \quad \nu_P = \frac{\partial P}{\partial r}\right)$



Zusammenfassung

Optionspreise von Europäischen Optionen:

$$
\begin{aligned}
C &= Se^{-\delta\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\\
P &= Ke^{-r\tau}N(-d_2) - Se^{-\delta\tau}N(-d_1)\\
d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\\
d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}
$$

τ: Restlaufzeit ($\tau = T - t$)

Grieche	Formel
Δ	$\epsilon e^{-\delta\tau}\Phi(\epsilon d_1)$
Γ	$e^{-\delta\tau}\frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
ν	$e^{-\delta\tau}\phi(d_1)S\sqrt{\tau}$
Θ	$-e^{-\delta\tau}\frac{S\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} + \epsilon\left[-rKe^{-r\tau}\Phi(\epsilon d_2) + \delta Se^{-\delta\tau}\Phi(\epsilon d_1)\right]$

$\epsilon = 1$ für Calls, $\epsilon = -1$ für Puts

- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
- $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\phi(z)\,\mathrm{d}z$: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Portfolio-Griechen

- Für den Wert Π eines Portfolios bestehend aus n Papieren gilt:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i C_i$$

- Ableitungen sind linear!
- Portfolio Griechen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial S} &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \frac{\partial C_i}{\partial S} \\ \Rightarrow \Delta_\Pi &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \Delta_i \\ \Rightarrow \Gamma_\Pi &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \Gamma_i \end{aligned}$$

und so weiter...

Dynamisches Hedging

- Hedging mit Griechen: Aktienpreis S_0. Was passiert bei eienr Kursveränderung zu S
  $\Rightarrow$ Δ-Hedging:

$$C(S) \approx C(S_0) + \left.\frac{\partial C}{\partial S}\right|_{S=S_0} (S - S_0)$$

$\Rightarrow$ Δ-Γ-Hedging:

$$C(S) \approx C(S_0) + \left.\frac{\partial C}{\partial S}\right|_{S=S_0} (S - S_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right|_{S=S_0} (S - S_0)^2$$

- Neutralität: Portfolio-Sensitivitäten sind gleich null:
  - Δ-Neutralität $\Leftrightarrow$ $\Delta_\Pi = 0$
  - Γ-Neutralität $\Leftrightarrow$ $\Gamma_\Pi = 0$
  - Δ-Γ-Neutralität: $\Leftrightarrow$ $\Delta_\Pi = \Gamma_\Pi = 0$

Dynamisches Hedging

- Wie erzielt man Δ-Γ-Neutralität bei einem Portfolio bestehend aus φ_1 Einheiten des Derivates C_1?

$$\begin{aligned} \varphi_2\Delta_2 + \varphi_3\Delta_3 &\stackrel{!}{=} \varphi_1\Delta_1 \\ \varphi_2\Gamma_2 + \varphi_3\Gamma_3 &\stackrel{!}{=} \varphi_1\Gamma_1 \end{aligned}$$

- Auch auf alle anderen Griechen anwendbar.
- Dynamisches Hedging: Analog zum Binomialmodell
- Passe das Portfolio an, um die Position mit Option und Underlying Δ-neutral zu halten, akkumuliere die Position im Hedge-Account
- Problem: Aktienkurs ändert sich *stetig* im Black-Scholes-Modell, aber Hedge kann nur zu *diskreten* Zeitpunkten angepasst werden $\rightarrow$ *Hedging Error!*

- Hedging-Error reduziert sich, bei steigender Anzahl der Portfolioumstrukturierungen