

Teil IV

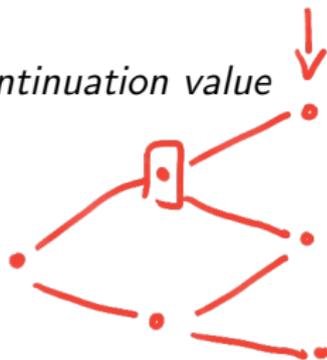
Amerikanische Optionen

14 Bewertung ohne Dividenden

15 Bewertung mit Dividenden

- Amerikanische Optionen verbriefen das Recht die Option zu jedem Zeitpunkt vor T auszuüben
- Halter steht vor einer Entscheidung: Ausüben oder weiter halten?
- Wie soll diese Entscheidung getroffen werden?
- Erste Idee: Über die Option aus, wenn sie im Geld ist, d.h. wenn
 - Call: $S_t > K$
 - Put: $S_t < K$
- Gute Strategie?

- Zielkonflikt zwischen
 - erzielbarem Payoff bei sofortiger Ausübung und
 - Chance auf höhere Gewinne bei weiterem Halten der Option
- Ausübungsstrategie:
 - Wenn Ausübungspayoff $>$ Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows
⇒ *ausüben!*
 - Wenn Ausübungspayoff \leq Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows
⇒ *weiter halten!*
- Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows: *continuation value*
- Wie bestimmt man den Continuation Value?
⇒ Bewertung wie im Einperiodenmodell!

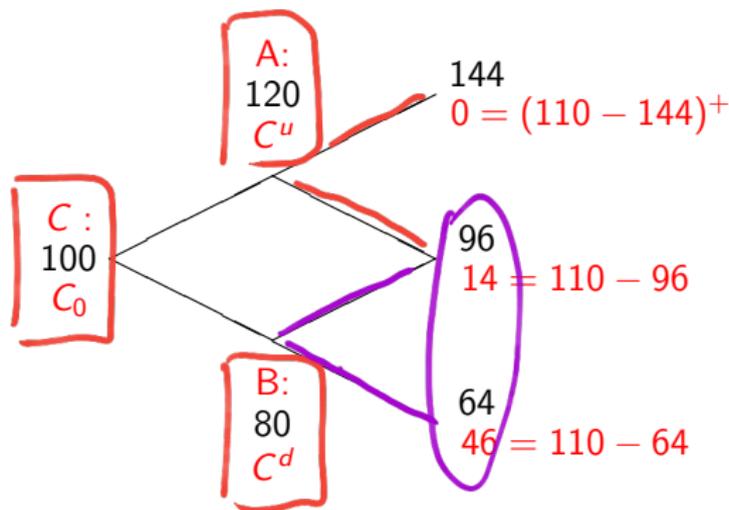


Beispiel zur Bewertung

$$P_T = (K - S_T)^+$$

Amerikanische Put Option

$(S_0 = 100, K = 110, u = 0.2, d = -0.2, r = 0.1, q = \frac{r-d}{u-d} = 0.75)$



Bewertungsalgorithmus

- Durchlaufe den Baum rückwärts (Backward Induction) und vergleiche in jedem Knoten den Ausübung-Payoff mit dem Continuation Value, d.h.

$$\max\{\text{Ausübung-Payoff, Continuation Value}\}$$

- A:

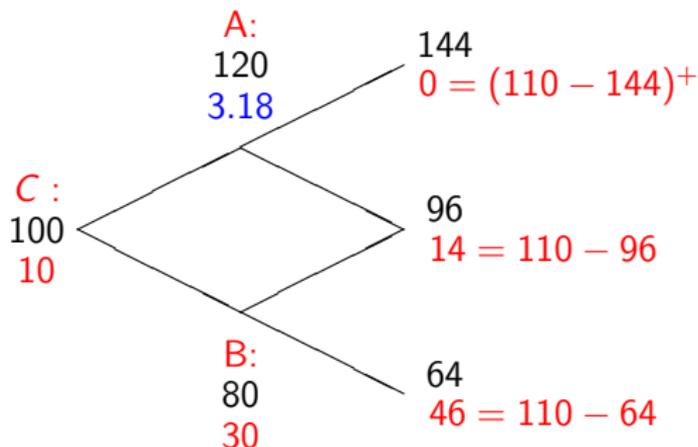
- Ausübung-Payoff=0 ✓
- Continuation Value = $\frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 14] = 3.18$ ✓
- $\max\{0, 3.18\} = 3.18 \Rightarrow$ weiter halten! ✓

- B:

- Ausübungs-Payoff=30 ✓
- Continuation Value = $\frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 14 + 0.25 \cdot 46] = 20$ ✓
- $\max\{30, 20\} = 30 \Rightarrow$ ausüben! ✓

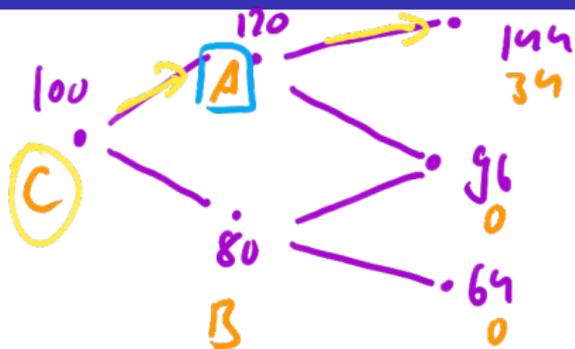
- C:

- Ausübungs-Payoff=10 ✓
- Continuation Value = $\frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 3.18 + 0.25 \cdot 30] = 8.98$ ✓
- $\max\{10, 8.98\} = 10 \Rightarrow$ ausüben! ✓



- Es ist leicht nachzurechnen, dass im Falle einer Call-Option sämtliche Ausübungs-Payoffs geringer als der jeweilige Continuation Value ist.

Amerikanische Call-Option



$K = 110$

$$q = \frac{r - d}{u - d}$$

A: Auszahlungspayoff: $\boxed{10}$

Continuierlicher Value: $\frac{1}{1.1} (0.75 \cdot 34 + 0.25 \cdot 0) = 23.18$
 \rightarrow k.u.h

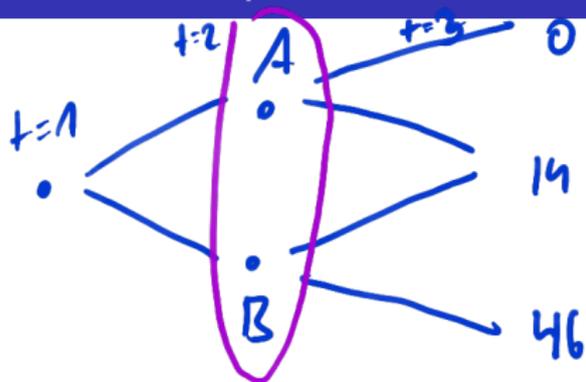
B: Auszahlungspayoff: 0
 Continuierlicher Value: 0

C: Auszahlungspayoff: 0
 Continuierlicher Value:

$$\frac{1}{1.1} (0.75 \cdot \boxed{23.18} + 0.25 \cdot 0) = \boxed{15.80}$$

- Bewertung von Bermuda-Optionen geschieht analog, mit der Ausnahme, dass der Ausübungspayoff nur an den Terminen berechnet wird, bei denen die Option ausgeübt werden kann.
- Bermuda-Option, die nur in $t = 2, 3$ ausgeübt werden kann
 - Preis = 8.98 ✓
 - Warum? → Option darf in $t=1$ nicht ausgeübt werden
- Bermuda-Option, die nur in $t = 1, 3$ ausgeübt werden kann
 - Preis = 10 ✓
 - Warum?

Bermuda-Optionen



Continuation values $A : 3.18$
 $B : 20$

$$\Rightarrow P_1 = \max\{10, \underbrace{8.50}_{< 10}\} = 10$$

C: Ausübepreiszoff: 10

$$\text{Continuation Value} : \frac{1}{1.1} (0.75 \cdot 3.18 + 0.25 \cdot \underbrace{20}_{< 30})$$

14 Bewertung ohne Dividenden

15 Bewertung mit Dividenden

Einzelne Dividendenzahlung

- Wir haben bereits gesehen, dass ohne Dividenden der ~~Europäische~~ *Amerikanische* Call niemals ausgeübt wird. Warum?

- Unbegrenztes Auszahlungspotential für eine Call-Option

- Keine Opportunitätskosten (fallende Aktienpreise) am Dividendentermin

- Jetzt: Dividendenzahlung D in τ (Dividendentermin, $\tau \in [0, T]$)

- Vergleiche den Ausübungs-Payoff bevor τ (an τ^-) und das weitere Halten des Calls:

- Ausübungs-Payoff: $S_{\tau^-} - K$
- Halten: untere Grenze für den Optionspreis in τ

$$C_{\tau} \geq S_{\tau} - K(1+r)^{-(T-\tau)}$$

$$S_{\tau} = S_{\tau^-} - D$$

- D.h. die Option wird nicht ausgeübt, falls

$$\begin{aligned} S_{\tau^-} - K &< S_{\tau^-} - D - K(1+r)^{-(T-\tau)} \\ \Rightarrow D &< K[1 - (1+r)^{-(T-\tau)}] \end{aligned}$$

- Kritische Dividende $D^* = K[1 - (1 + r)^{-(T-\tau)}]$: Option wird nicht ausgeübt, falls $D < D^*$.
- Wird die Option immer ausgeübt, wenn $D > D^*$?
⇒ Nein, der Call könnte aus dem Geld sein.
- Was ist bei Puts anders?