Teil IV

Amerikanische Optionen

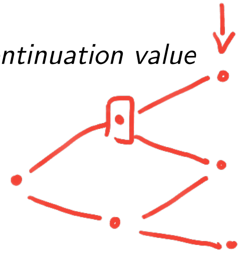
Inhaltsverzeichnis

Problemstellung

- Amerikanische Optionen verbriefen das Recht die Option zu jedem Zeitpunkt vor T auszuüben
- Halter steht vor einer Entscheidung: Ausüben oder weiter halten?
- Wie soll diese Entscheidung getroffen werden?
- Erste Idee: Über die Option aus, wenn sie im Geld ist, d.h. wenn
  - Call: $S_t > K$
  - Put: $S_t < K$
- Gute Strategie?

Problemstellung

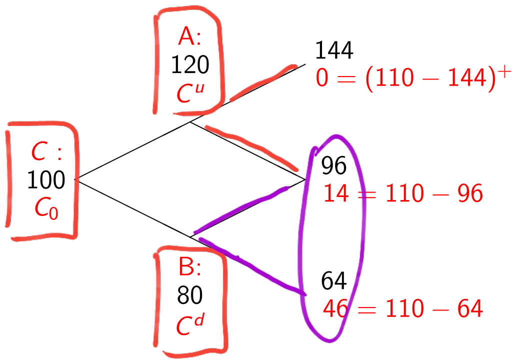
- Zielkonflikt zwischen
  - erzielbarem Payoff bei sofortiger Ausübung und
  - Chance auf höhere Gewinne bei weiterem Halten der Option
- Ausübungsstrategie:
  - Wenn Ausübungspayoff $>$ Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows $\Rightarrow$ *ausüben*!
  - Wenn Ausübungspayoff $\leq$ Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows $\Rightarrow$ *weiter halten*!
- Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows: *continuation value*
- Wie bestimmt man den Continuation Value? $\Rightarrow$ Bewertung wie im Einperiodenmodell!



$$P_T = (K - S_T)^+$$

Amerikanische Put Option

$(S_0 = 100,\ K = 110,\ u = 0.2,\ d = -0.2,\ r = 0.1,\ q = \frac{r-d}{u-d} = 0.75)$



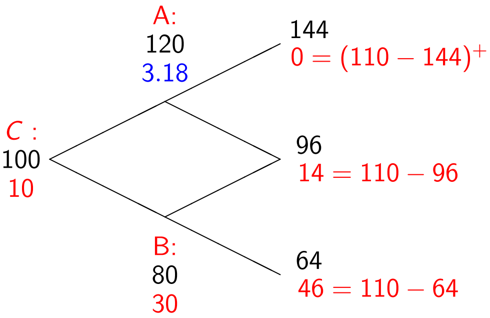
Bewertungsalgorithmus

- Durchlaufe den Baum rückwärts (Backward Induction) und vergleiche in jedem Knoten den Ausübung-Payoff mit dem Continuation Value, d.h.

$$\max\{\text{Ausübung-Payoff, Continuation Value}\}$$

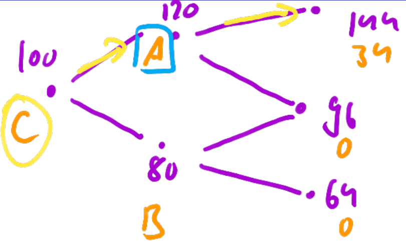
- A:
  - Ausübung-Payoff=0 ✓
  - Continuation Value $= \frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 14] = 3.18$ ✓
  - $\max\{0, 3.18\} = 3.18 \Rightarrow$ *weiter halten*! ✓
- B:
  - Ausübungs-Payoff=30 ✓
  - Continuation Value $= \frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 14 + 0.25 \cdot 46] = 20$ ✓
  - $\max\{30, 20\} = 30 \Rightarrow$ *ausüben*! ✓
- C:
  - Ausübungs-Payoff=10 ✓
  - Continuation Value $= \frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 3.18 + 0.25 \cdot 30] = 8.98$ ✓
  - $\max\{10, 8.98\} = 10 \Rightarrow$ *ausüben*! ✓

Bewertungsalgorithmus



- Es ist leicht nachzurechnen, dass im Falle einer Call-Option sämtliche Ausübungs-Payoffs geringer als der jeweilige Continuation Value ist.

Amerikanische Call-Option



$K = 110$

$$q = \frac{r-d}{u-d}$$

A: Ausübungspayoff: $\boxed{10}$

Continuation Value: $\frac{1}{1.1}(0.75 \cdot 34 + 0.25 \cdot 0) = 23.18$

$\rightarrow$ halte

B: Ausübungspayoff: 0

Continuation Value: 0

C: Ausübungspayoff: 0

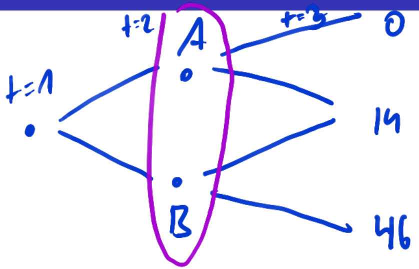
Continuation Value:

$\frac{1}{1.1}(0.75 \cdot \boxed{23.18} + 0.25 \cdot 0) = 15.80$

Bermuda-Optionen

- Bewertung von Bermuda-Optionen geschieht analog, mit der Ausnahme, dass der Ausübungspayoff nur an den Terminen berechnet wird, bei denen die Option ausgeübt werden kann.
- Bermuda-Option, die nur in $t = 2, 3$ ausgeübt werden kann
  - Preis $= 8.98$ ✓
  - Warum? → Option darf in $t=1$ nicht ausgeübt werden
- Bermuda-Option, die nur in $t = 1, 3$ ausgeübt werden kann
  - Preis $= 10$ ✓
  - Warum?

Bermuda-Optionen



Continuation value $A: 3.18$

$B: 20$ $\Rightarrow P_1 = \max\{10, <8.98\}$

$= 10$

C: Ausübungspayoff: 10

Continuation Value: $\frac{1}{1.1}\left(0.75 \cdot 3.18 + 0.25 \cdot \overbrace{20}^{<30}\right)$

Inhaltsverzeichnis

Einzelne Dividendenzahlung

- Wir haben bereits gesehen, dass ohne Dividenden der Europäische Call niemals ausgeübt wird. Warum?
  - Unbegrenztes Auszahlungspotential für eine Call-Option
  - Keine Opportunitätskosten (fallende Aktienpreise) am Dividendentermin
- Jetzt: Dividendenzahlung D in τ (Dividendentermin, $\tau \in [0, T]$)
- Vergleiche den Ausübungs-Payoff bevor τ (an τ^-) und das weitere Halten des Calls:
  - Ausübungs-Payoff: $S_{\tau^-} - K$
  - Halten: untere Grenze für den Optionspreis in τ

$$C_\tau \geq S_\tau - K(1+r)^{-(T-\tau)}$$

$$S_\tau = S_{\tau^-} - D$$

- D.h. die Option wird nicht ausgeübt, falls

$$\begin{aligned} S_{\tau^-} - K &< S_{\tau^-} - D - K(1+r)^{-(T-\tau)} \\ \Rightarrow D &< K[1-(1+r)^{-(T-\tau)}] \end{aligned}$$

Einzelne Dividendenzahlung

- Kritische Dividende $D^* = K[1 - (1+r)^{-(T-\tau)}]$: Option wird nicht ausgeübt, falls $D < D^*$.
- Wird die Option immer ausgeübt, wenn $D > D^*$?
  $\Rightarrow$ Nein, der Call könnte aus dem Geld sein.
- Was ist bei Puts anders?