

Teil IV

Amerikanische Optionen

14 Bewertung ohne Dividenden

15 Bewertung mit Dividenden

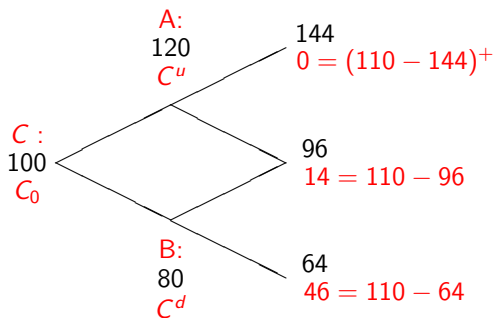
- Amerikanische Optionen verbriefen das Recht die Option zu jedem Zeitpunkt vor T auszuüben
- Halter steht vor einer Entscheidung: Ausüben oder weiter halten?
- Wie soll diese Entscheidung getroffen werden?
- Erste Idee: Über die Option aus, wenn sie im Geld ist, d.h. wenn
 - Call: $S_t > K$
 - Put: $S_t < K$
- Gute Strategie?

- Zielkonflikt zwischen
 - erzielbarem Payoff bei sofortiger Ausübung und
 - Chance auf höhere Gewinne bei weiterem Halten der Option
- Ausübungsstrategie:
 - Wenn Ausübungspayoff $>$ Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows
⇒ *ausüben!*
 - Wenn Ausübungspayoff \leq Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows
⇒ *weiter halten!*
- Erwarteter Barwert zukünftiger Cashflows: *continuation value*
- Wie bestimmt man den Continuation Value?
⇒ Bewertung wie im Einperiodenmodell!

Beispiel zur Bewertung

Amerikanische Put Option

($S_0 = 100$, $K = 110$, $u = 0.2$, $d = -0.2$, $r = 0.1$, $q = \frac{r-d}{u-d} = 0.75$)



- Durchlaufe den Baum rückwärts (Backward Induction) und vergleiche in jedem Knoten den Ausübung-Payoff mit dem Continuation Value, d.h.

$$\max\{\text{Ausübung-Payoff, Continuation Value}\}$$

- A:

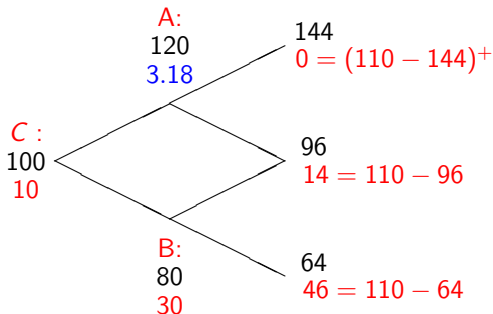
- Ausübung-Payoff=0
- Continuation Value = $\frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 14] = 3.18$
- $\max\{0, 3.18\} = 3.18 \Rightarrow$ *weiter halten!*

- B:

- Ausübungs-Payoff=30
- Continuation Value = $\frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 14 + 0.25 \cdot 46] = 20$
- $\max\{30, 20\} = 30 \Rightarrow$ *ausüben!*

- C:

- Ausübungs-Payoff=10
- Continuation Value = $\frac{1}{1.1}[0.75 \cdot 3.18 + 0.25 \cdot 30] = 8.98$
- $\max\{10, 8.98\} = 10 \Rightarrow$ *ausüben!*



- Es ist leicht nachzurechnen, dass im Falle einer Call-Option sämtliche Ausübungs-Payoffs geringer als der jeweilige Continuation Value ist.

Amerikanische Call-Option

- Bewertung von Bermuda-Optionen geschieht analog, mit der Ausnahme, dass der Ausübungspayoff nur an den Terminen berechnet wird, bei denen die Option ausgeübt werden kann.
- Bermuda-Option, die nur in $t = 2, 3$ ausgeübt werden kann
 - Preis = 8.98
 - Warum?
- Bermuda-Option, die nur in $t = 1, 3$ ausgeübt werden kann
 - Preis = 10
 - Warum?

14 Bewertung ohne Dividenden

15 Bewertung mit Dividenden

Einzelne Dividendenzahlung

- Wir haben bereits gesehen, dass ohne Dividenden der Europäische Call niemals ausgeübt wird. Warum?
 - Unbegrenzttes Auszahlungspotential für eine Call-Option
 - Keine Opportunitätskosten (fallende Aktienpreise) am Dividendentermin
- Jetzt: Dividendenzahlung D in τ (Dividendentermin, $\tau \in [0, T]$)
- Vergleiche den Ausübungs-Payoff bevor τ (an τ^-) und das weitere Halten des Calls:
 - Ausübungs-Payoff: $S_{\tau^-} - K$
 - Halten: untere Grenze für den Optionspreis in τ

$$C_{\tau} \geq S_{\tau} - K(1+r)^{-(T-\tau)}$$

$$S_{\tau} = S_{\tau^-} - D$$

- D.h. die Option wird nicht ausgeübt, falls

$$\begin{aligned} S_{\tau^-} - K &< S_{\tau^-} - D - K(1+r)^{-(T-\tau)} \\ \Rightarrow D &< K[1 - (1+r)^{-(T-\tau)}] \end{aligned}$$

- Kritische Dividende $D^* = K[1 - (1 + r)^{-(T-\tau)}]$: Option wird nicht ausgeübt, falls $D < D^*$.
- Wird die Option immer ausgeübt, wenn $D > D^*$?
⇒ Nein, der Call könnte aus dem Geld sein.
- Was ist bei Puts anders?