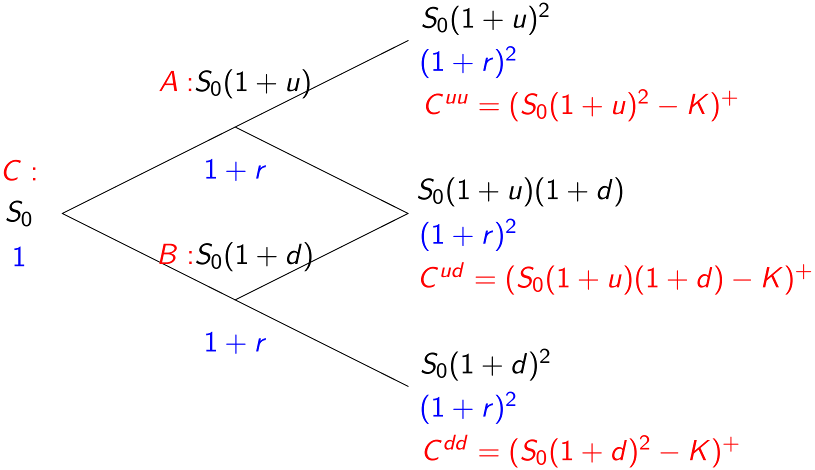
Teil III

Optionsbewertung in Binomialbäumen

Inhaltsverzeichnis


$C:$
S_0
1
$A: S_0(1+u)$
$1+r$
$B: S_0(1+d)$
$1+r$
$S_0(1+u)^2$
$(1+r)^2$
$C^{uu} = (S_0(1+u)^2 - K)^+$
$S_0(1+u)(1+d)$
$(1+r)^2$
$C^{ud} = (S_0(1+u)(1+d) - K)^+$
$S_0(1+d)^2$
$(1+r)^2$
$C^{dd} = (S_0(1+d)^2 - K)^+$

- Knoten A:

$$C^u = \frac{1}{1+r}\left[qC^{uu} + (1-q)C^{ud}\right]$$

- Knoten B:

$$C^d = \frac{1}{1+r}\left[qC^{ud} + (1-q)C^{dd}\right]$$

- Knoten C:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r}\left[qC^u + (1-q)C^d\right] \\ \Rightarrow C_0 &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[q^2c^{uu} + 2q(1-q)C^{ud} + (1-q)^2C^{dd}\right] \end{aligned}$$

Inhaltsverzeichnis

Wdh.: Pascalsches Dreieck und Binomialkoeffizienten

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Verallgemeinere diese Formel auf ein Modell mit T Schritten:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=0}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} C_T^{(i)} \\ C_T^{(i)} &= \left(S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - K\right)^+ \end{aligned}$$

- Definiere a als die minimale Anzahl von Kursanstiegen, die nötig sind, so dass die Option im Geld endet:

$$S_T^{(a)} > K \quad \text{and} \quad S_T^{(a-1)} \leq K$$

- Daher:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} (S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - K)$$

die Formel in eine Differenz:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} \\
&\quad - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Schreibe die Discount-Faktoren und Wahrscheinlichkeiten um:

$$
\begin{aligned}
(1+r)^T &= (1+r)^i (1+r)^{T-i} \\
\frac{(1+u)^i q^i}{(1+r)^i} &= \left(\frac{(1+u)q}{1+r}\right)^i \\
&= \tilde{q}^i \qquad (3) \\
\frac{(1+d)^{T-i}(1-q)^{T-i}}{(1+r)^{T-i}} &= \left(\frac{(1+d)(1-q)}{1+r}\right)^{T-i} \\
&= (1-\tilde{q})^{T-i} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Setze (3) und (4) in den ersten Teil von (2) ein:

$$\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}q^i(1-q)^{T-i}S_0(1+u)^i(1+d)^{T-i}$$
$$= S_0\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}\tilde{q}^i(1-\tilde{q})^{T-i}$$

- Binomialverteilung:

$$\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}\tilde{q}^i(1-\tilde{q})^{T-i} \equiv B(T,\tilde{q};a)$$

- Analog für den zweiten Term:

$$\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}q^i(1-q)^{T-i} \equiv B(T,q;a)$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Daraus ergibt sich:

$$C_0 = S_0 B(T, \tilde{q}; a) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, q; a)$$

- Interpretation: Die Terme $B(T, \tilde{q}; a)$ und $B(T, q; a)$ sind Wahrscheinlichkeiten
- Welche Art von Wahrscheinlichkeiten?

$$\begin{aligned} B(T, \tilde{q}; a) &= Prob^{\widetilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K) \\ B(T, q; a) &= Prob^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) \end{aligned}$$

künstliche Wahrscheinlichkeiten, dass der Call im Geld endet
- Künstliche Wahrscheinlichkeiten bzgl. des jweiligen Numeraires
  - $\widetilde{\mathbb{Q}}$: Aktie
  - $\mathbb{Q}$: Geldmarktkonto

Analogie zum Black-Scholes Modell

Inhaltsverzeichnis

Exotische Optionen (Auswahl)

- Asiatische Option
  - Auszahlungsprofil hängt von der Differenz zwischen dem Strike-Preises und einem Mittelwert über vergangene Kurse des Underlyings ab.
  - Call: $C_T = \left(\sum_{t=1}^{T} S_t - K\right)^+$, Put: $P_T = \left(K - \sum_{t=1}^{T} S_t\right)^+$
- Barriere-Option
  - Option die durch Überschreiten oder Unterschreiten einer Barriere aktiviert (Knock-In-Option) oder deaktiviert (Knock-Out-Option)
  - Digitale Barriere-Optionen zahlen am Laufzeitende einen Nominalbetrag aus, wenn der Kurs während der Laufzeit eine Schwelle passiert.
- Bermuda-Option
  - Option mit mehreren Ausübungszeitpunkten, jedoch ist die Option nicht durchgängig zwischen Emission und Fälligkeit ausübbar.
  - Der Name Bermuda-Option rührt daher, dass Bermuda zwischen Amerika und Europa liegt.

Exotische Optionen (Auswahl)

- Chooser-Option
  - Der Käufer muss zu einem definierten Zeitpunkt vor der Fälligkeit entscheiden, ob er seinen Chooser in eine Call-Option oder eine Put-Option umwandeln will.
- Exchange-Option
  - Option erlaubt am Ende der Laufzeit das Underlying gegen ein alternatives Produkt zu tauschen.
- Lookback-Option
  - Basispreis wird erst bei Ausübung festgelegt als der beste Preis, den der Basiswert während der Optionslaufzeit erreicht hat.
  - Im Fall einer Call-Option ist das der niedrigste Preis, bei einer Put-Option der höchste.
  - Bei Fälligkeit erhält der Käufer der Option die Differenz zwischen dem Marktpreis des Basiswertes zum Zeitpunkt der Fälligkeit und dem nun festgelegten Basispreis.

Bewertung pfadabhängiger Optionen

- Bei pfadabhängigen Optionen (z.B. Asiatisch, Lookback, Barriere) hängt das Auszahlungsprofil nicht nur vom Schlusskurs der Aktie ab, sondern auch von dem Weg, den der Kurs durch den Baum genommen hat.
- Einfache Bewertung in Binomialbäumen
  1. Stelle den Binomialbaum für das Underlying auf.
  2. Ermittle für jeden einzelnen Pfad i das Auszahlungprofil C_i in T Wie viele Pfade gibt es? $\Rightarrow 2^T$.
  3. Bestimme für jeden einzelnen Pfad die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $q^{\ell_i}(1-q)^{T-\ell_i}$, wobei ℓ_i die Anzahl der up-Steps und $T-\ell_i$ die Anzahl der down-Steps in Pfad i ist.
  4. Bestimme den diskontierten Erwartungswert der Auszahlungen, d.h.

$$P = \sum_{i=1}^{2^T} \frac{q^{\ell_i}(1-q)^{T-\ell_i} C_i}{(1+r)^T}$$

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

Inhaltsverzeichnis

Dynamisches Hedging

- Betrachte ein Modell mit den folgenden Parametern: $S_0 = 42$, $u = 0.07$, $d = -0.05$, $r = 0.05$ (diskrete Verzinsung)
- Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten: $q_u = 0.833$, $q_d = 0.167$
- Betrachte Call-Option mit $T = 3$, Strike-Preis $K = 42$: $C_0 = 5.83$
- Annahme: Bank verkauft Call für 6 an einen Kunden
- Sofortiger Gewinn: $6 - 5.83 = 0.17$
- Aber: Option könnte im Geld enden und ausgeübt werden, wodurch der Gewinn verloren ginge.
- Wie lässt sich der Gewinn absichern? $\rightarrow$ Dynamisches Hedging!

Dynamisches Hedging

- $\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$: Sensitivität des Optionspreises bzgl. des Preises des Underlyings
- Wir wissen vom Einperiodenmodell

$$C = \Delta S + B$$

daher

$$C - \Delta S = B$$

Option plus Δ Einheiten des Underlyings short ist risikofrei!

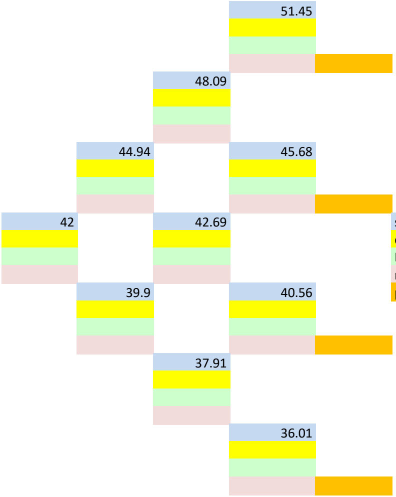
- Aber auch

$$-C + \Delta S = -B,$$

Δ Einheiten des Underlyings plus eine Option short ist risikofrei.

Aktienkurse im Binomialbaum

$(S_0 = 42,\ u = 0.07,\ d = -0.05)$



stock price	from binomial model
option	option value
Delta	delta of option position
money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
profit	terminal profit

Aktienkurse und Optionspreis gemäß Formel im Binomialbaum

($S_0 = 42,\ u = 0.07,\ d = -0.05,\ r = 0.05,\ T = 3,\ K = 42 \Rightarrow q_u = 0.833,\ q_d = 0.167$)

option transaction price			51.45			
6			9.45			
		48.09				
		8.09				
	44.94		45.68			
	6.88		3.68			
42		42.69			stock price	from binomial model
5.83		2.92			option	option value
					Delta	delta of option position
					money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
	39.9		40.56		profit	terminal profit
	2.32		0			
		37.91				
		0				
			36.01			
			0			

Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise und Δ im Binomialbaum

$(\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d})$

option transaction price 6			51.45 9.45 1	
		48.09 8.09 1		
	44.94 6.88 0.96		45.68 3.68 1	
42 5.83 0.91		42.69 2.92 0.72		
	39.90 2.32 0.61		40.56 0 0	
		37.91 0 0		
			36.01 0 0	

stock price	from binomial model
option	option value
Delta	delta of option position
money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
profit	terminal profit

Dynamisches Hedging

- Position im Underlying: ΔS
- Position im Geldmarktkonto: $B = C - \Delta S$;
  falls $B > 0 \Rightarrow$ Geldanlage
  falls $B < 0 \Rightarrow$ Kreditaufnahme zur Finanzierung des Hedges
  - Kreditposition in $t = 0$:
    Leihe Geld um 0.91 Anteile zu je 42 zu kaufen
    $B_0 = 6 - 0.91 \cdot 42 = -32.02$
  - Kreditposition in $t = 1$, up-state:
    1. Kreditbetrag wächst um $r = 5\%$ Zinsen: $-32.02 \cdot 1.05 = -33.62$
    2. Leihe Geld um $0.96 - 0.91 = 0.05$ Anteile zu je 44.94 zu kaufen, d.h. leihe zusätzliche 2.35
    3. neue Kreditposition: $-33.62 - 2.35 = -35.97$
  - Gleiches Verfahren für alle weiteren Knoten

Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise, Δ und Position im Geldmarktkonto B
($B = C - \Delta S$; falls $B > 0 \Rightarrow$ Geldanlage, falls $B < 0 \Rightarrow$ Kreditaufnahme)

option transaction price			51,45			
6			9,45			
			1			
			-41,80			
		48,09				
		8,09				
		1				
		-39,81				
	44,94		45,68			
	6,88		3,68			
	0,96		1			
	-35,97		-41,80			
42		42,69			stock price	from binomial model
5,83		2,92			option	option value
0,91		0,72			Delta	delta of option position
-32,02		-27,57			money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
	39,9		40,56		profit	terminal profit
	2,32		0			
	0,61		0			
	-21,85		0,20			
		37,91				
		0				
		0				
		0,19				
			36,01			
			0			
			0			
			0,20			

Dynamisches Hedging

- Berechnung des Profits in $T = 3$ in Zustand uuu
  - Kreditposition im Hedge-Portfolio: -41.80
  - Aktienposition im Hedge-Portfolio ($\Delta = 1$): 51.45
  - Optionspayoff (Option wird ausgeübt): -9.45
  - Gesamtposition: $-41.80 - 9.45 + 51.45 = 0.20$
- Gleiches Verfahren für alle weiteren Knoten
  $\Rightarrow$ Risikofrei!
- Barwert: $0.20 \cdot (1.05)^{-3} = 0.17$
  $\Rightarrow$ Profit durch Verkauf der Option wurde vollständig gehedgt!

Aktienkurse, Optionspreise, Δ, Position im Geldmarktkonto B und Profit in $T = 3$

option transaction price			51,45			
6			9,45			
			1			
			-41,80	0,20	profit	
		48,09				
		8,09			plus value of stock position in hedge portfolio	51,45
		1			plus terminal value of money mkt account	-41,80
		-39,81			minus option payoff	-9,45
	44,94		45,68			**0,20**
	6,88		3,68			
	0,96		1			
	-35,97		-41,80	0,20		
42		42,69			stock price	from binomial model
5,83		2,92			option	option value
0,91		0,72			Delta	delta of option position
-32,02		-27,57			money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
	39,9		40,56		profit	terminal profit
	2,32		0			
	0,61		0			
	-21,85		0,20	0,20		
		37,91				
		0				
		0				
		0,19				
			36,01			
			0			
			0			
			0,20	0,20		