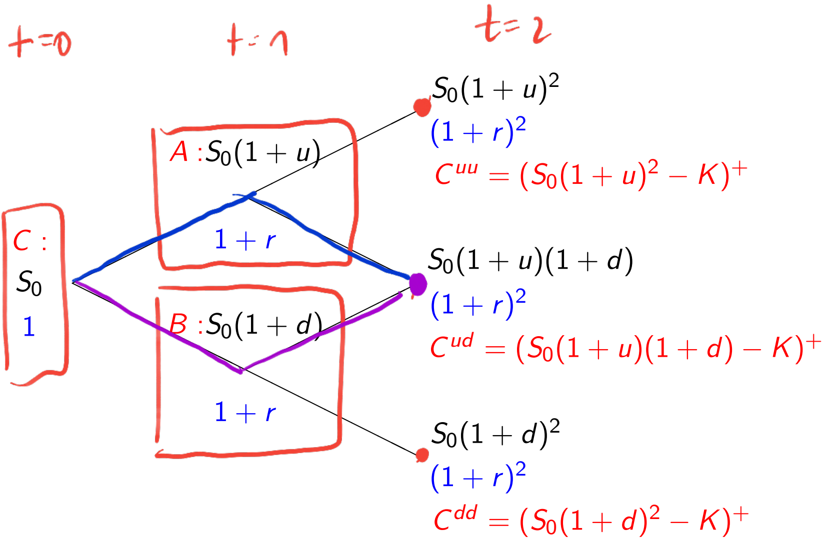
Teil III

Optionsbewertung in Binomialbäumen

Inhaltsverzeichnis

Zweiperiodenmodell



Zweiperiodenmodell

- Knoten A:

$$C^u = \frac{1}{1+r}\left[qC^{uu} + (1-q)C^{ud}\right]$$

- Knoten B:

$$C^d = \frac{1}{1+r}\left[qC^{ud} + (1-q)C^{dd}\right]$$

- Knoten C:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left[qC^u + (1-q)C^d\right]$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{(1+r)^2}\left[q^2C^{uu} + 2q(1-q)C^{ud} + (1-q)^2C^{dd}\right]$$

Inhaltsverzeichnis

Wdh.: Pascalsches Dreieck und Binomialkoeffizienten

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

1 periode: $C_0 = \frac{1}{1+r}\left(1 \cdot q^1 C^u + 1(1-q)^1 C^d\right)$

2 Periode: $C_0 = \frac{1}{(1+r)^2}\left(1 \cdot q^2 C^{uu} + 2\, q(1-q)\, C^{ud} + 1 \cdot (1-q)^2 C^{dd}\right)$

$\binom{T}{i}$ # Wege, die möglich sind um zu Knoten i zu gelangen

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Verallgemeinere diese Formel auf ein Modell mit T Schritten:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=0}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} C_T^{(i)}$$

$$C_T^{(i)} = \left(S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - K\right)^+$$

$$P_T^{(i)} = \left(K - S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i}\right)^+$$

- Definiere a als die minimale Anzahl von Kursanstiegen, die nötig sind, so dass die Option im Geld endet:

$$S_T^{(a)} > K \quad \text{and} \quad S_T^{(a-1)} \leq K$$

- Daher:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} \left[\overbrace{S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - K}\right]$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

die Formel in eine Differenz:

$$
\begin{aligned}
C_0 \quad = \quad & \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} \\
& - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^{T} \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Schreibe die Discount-Faktoren und Wahrscheinlichkeiten um:

Potenzgesetze

$$
\begin{aligned}
(1+r)^T &= \boxed{(1+r)^i (1+r)^{T-i}} \\
\frac{(1+u)^i q^i}{(1+r)^i} &= \left(\frac{(1+u)q}{1+r}\right)^i \\
&= \tilde{q}^i \qquad (3) \\
\frac{(1+d)^{T-i}(1-q)^{T-i}}{(1+r)^{T-i}} &= \left(\frac{(1+d)(1-q)}{1+r}\right)^{T-i} \\
&= (1-\tilde{q})^{T-i} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Setze (3) und (4) in den ersten Teil von (2) ein:

$$\frac{1}{(1+r)^T}\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}q^i(1-q)^{T-i}S_0(1+u)^i(1+d)^{T-i}$$

$$= S_0\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}\tilde{q}^i(1-\tilde{q})^{T-i}$$

- Binomialverteilung:

$$\boxed{\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}\tilde{q}^i(1-\tilde{q})^{T-i}} \equiv \underbrace{B(T,\tilde{q};a)}_{\tilde{Q}(S_T > K)}$$

- Analog für den zweiten Term:

$$\boxed{\sum_{i=a}^{T}\binom{T}{i}q^i(1-q)^{T-i}} \equiv \underbrace{B(T,q;a)}_{Q(S_T > K)}$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Daraus ergibt sich: $C_0 \geq S_0 - \frac{K}{(1+r)^T}$

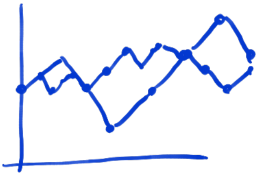
$$C_0 = S_0 B(T, \tilde{q}; a) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, q; a)$$

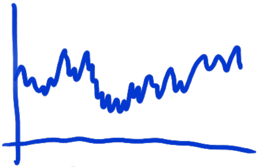
- Interpretation: Die Terme $B(T, \tilde{q}; a)$ und $B(T, q; a)$ sind Wahrscheinlichkeiten
- Welche Art von Wahrscheinlichkeiten?

$$\begin{aligned} B(T, \tilde{q}; a) &= Prob^{\widetilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K) \\ B(T, q; a) &= Prob^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K) \end{aligned}$$

künstliche Wahrscheinlichkeiten, dass der Call im Geld endet

- Künstliche Wahrscheinlichkeiten bzgl. des jweiligen Numeraires
  - $\widetilde{\mathbb{Q}}$: Aktie
  - $\mathbb{Q}$: Geldmarktkonto





Binomialmodell

↳ Binomialverteilte Rendite

Black-Scholes Modell

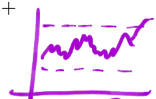
↳ Normalverteilte Rendite

$$C_0 = S_0 \underbrace{B(T, \tilde{q}; a)} - \frac{K}{(1+r)^T} \underbrace{B(T, q; a)} \longrightarrow C_0 = S_0 \underbrace{N(d_1)} - K e^{-rT} \underbrace{N(d_2)}$$

Inhaltsverzeichnis

Exotische Optionen (Auswahl)

- Asiatische Option
  - Auszahlungsprofil hängt von der Differenz zwischen dem Strike-Preises und einem Mittelwert über vergangene Kurse des Underlyings ab.
  - Call: $C_T = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} S_t - K\right)^+$, Put: $P_T = \left(K - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} S_t\right)^+$



- Barriere-Option
  - Option die durch Überschreiten oder Unterschreiten einer Barriere aktiviert (Knock-In-Option) oder deaktiviert (Knock-Out-Option)
  - Digitale Barriere-Optionen zahlen am Laufzeitende einen Nominalbetrag aus, wenn der Kurs während der Laufzeit eine Schwelle passiert.

Tunnel Option

- Bermuda-Option
  - Option mit mehreren Ausübungszeitpunkten, jedoch ist die Option nicht durchgängig zwischen Emission und Fälligkeit ausübbar.
  - Der Name Bermuda-Option rührt daher, dass Bermuda zwischen Amerika und Europa liegt.

Exotische Optionen (Auswahl)

- Chooser-Option

  $t=0$ $t=1$ $t=2$

  - Der Käufer muss zu einem definierten Zeitpunkt vor der Fälligkeit entscheiden, ob er seinen Chooser in eine Call-Option oder eine Put-Option umwandeln will.
- Exchange-Option
  - Option erlaubt am Ende der Laufzeit das Underlying gegen ein alternatives Produkt zu tauschen.
- Lookback-Option
  - Basispreis wird erst bei Ausübung festgelegt als der beste Preis, den der Basiswert während der Optionslaufzeit erreicht hat.
  - Im Fall einer Call-Option ist das der niedrigste Preis, bei einer Put-Option der höchste.
  - Bei Fälligkeit erhält der Käufer der Option die Differenz zwischen dem Marktpreis des Basiswertes zum Zeitpunkt der Fälligkeit und dem nun festgelegten Basispreis.

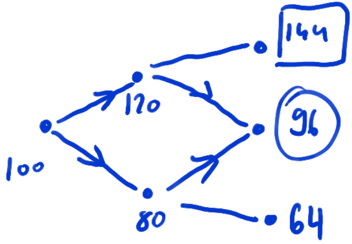
Bewertung pfadabhängiger Optionen

- Bei pfadabhängigen Optionen (z.B. Asiatisch, Lookback, Barriere) hängt das Auszahlungsprofil nicht nur vom Schlusskurs der Aktie ab, sondern auch von dem Weg, den der Kurs durch den Baum genommen hat.
- Einfache Bewertung in Binomialbäumen
  1. Stelle den Binomialbaum für das Underlying auf.
  2. Ermittle für jeden einzelnen Pfad i das Auszahlungprofil C_i in T
     Wie viele Pfade gibt es? $\Rightarrow 2^T$.
  3. Bestimme für jeden einzelnen Pfad die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $q^{\ell_i}(1-q)^{T-\ell_i}$, wobei ℓ_i die Anzahl der up-Steps und $T-\ell_i$ die Anzahl der down-Steps in Pfad i ist.
  4. Bestimme den diskontierten Erwartungswert der Auszahlungen, d.h.

$$\boxed{P = \sum_{i=1}^{2^T} \frac{q^{\ell_i}(1-q)^{T-\ell_i} C_i}{(1+r)^T}}$$

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

- $u = 0.2$, $d = -0.2$, $r = 0.1$, $S_0 = 100$
- $q = \frac{r-d}{u-d} = 0.75$



① Asiatische Option

Call mit Strike

$K = 100$

uu: $\bar{S} = \frac{1}{3}(100 + 120 + 144) = \underline{118}$

ud: $\bar{S} = \frac{1}{3}(100 + 120 + 96) = 105.33$

du: $\bar{S} = \frac{1}{3}(100 + 80 + 96) = 92$ $< K$

dd: $\bar{S} = \frac{1}{3}(100 + 80 + 64) = 81$ $< K$

$$C_0^{asiat} = \frac{1}{1.1^2}\left(q^2 \cdot (118 - 100) + q \cdot (1-q)(105.33 - 100)\right)$$

$$\approx 9.19$$

$$C_0^{europ} = 20.45$$

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

② **Knock-in Option**

Barriere $= 90$

Strike-Preis $= K = 80$

$$P_0 = \frac{1}{1.1^2} \cdot 0.25^2 \cdot 16 = 0.83$$

$$C_0 = \frac{1}{1.1^2} \cdot q(1-q) \cdot 16 = \frac{1}{1.1^2} \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 16 = 1.86$$

	Barriere	Call	Put
uu	—	0	0
ud	—	0	0
du	✓	$96 - 80 = 16$	0
dd	✓	$(64-80)^+ = 0$	$80 - 64 = 16$

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

③ Lookback-Option

	CALL		PUT	
uu	$K=100$	44	$K=144$	0
ud	$K=96$	0	$K=120$	$120-96=24$
du	$K=80$	16	$K=100$	$100-96=4$
dd	$K=64$	0	$K=100$	$100-84=36$

$$C_0 = \frac{1}{1.1^2}\left(0.75^2 \cdot 44 + 0.25 \cdot 0.75 \cdot 16\right) = \dots \quad 22.73$$

$$P_0 = \frac{1}{1.1^2}\left(0.25 \cdot 0.75 \cdot 24 + 0.25 \cdot 0.75 \cdot 4 + 0.25^2 \cdot 36\right) = \dots \quad 6.20$$

Inhaltsverzeichnis

Dynamisches Hedging

$$q_u = \frac{r-d}{u-d}, \quad q_d = 1 - q_u$$

- Betrachte ein Modell mit den folgenden Parametern: $S_0 = 42$, $u = 0.07$, $d = -0.05$, $r = 0.05$ (diskrete Verzinsung)
- Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten: $q_u = 0.833$, $q_d = 0.167$
- Betrachte Call-Option mit $T = 3$, Strike-Preis $K = 42$: $C_0 = \underline{5.83}$
- Annahme: Bank verkauft Call für 6 an einen Kunden
- Sofortiger Gewinn: $6 - 5.83 = 0.17$
- Aber: Option könnte im Geld enden und ausgeübt werden, wodurch der Gewinn verloren ginge.
- Wie lässt sich der Gewinn absichern? $\rightarrow$ Dynamisches Hedging!

Dynamisches Hedging

- $\boxed{\Delta} = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$: Sensitivität des Optionspreises bzgl. des Preises des Underlyings
- Wir wissen vom Einperiodenmodell

$$C = \underbrace{\Delta S}_{\text{Investition in Aktie}} + B$$

daher

$$C - \Delta S = B$$

Option plus Δ Einheiten des Underlyings short ist risikofrei!

- Aber auch

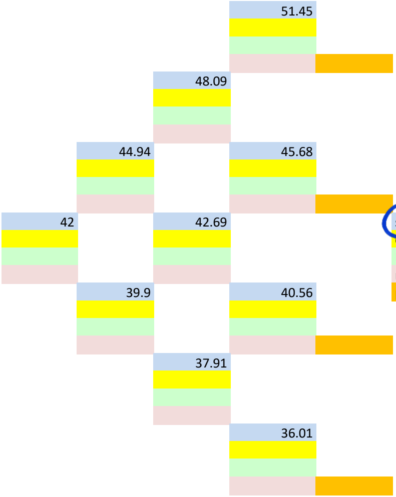
$$-C + \Delta S = -B,$$

Δ Einheiten des Underlyings plus eine Option short ist risikofrei.

Aktienkurse im Binomialbaum

$(S_0 = 42,\ \underline{u = 0.07},\ \underline{d = -0.05})$

T= 3



stock price	from binomial model
option	option value
Delta	delta of option position
money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
profit	terminal profit

Aktienkurse und Optionspreis gemäß Formel im Binomialbaum

$(S_0 = 42,\ u = 0.07,\ d = -0.05,\ r = 0.05,\ T = 3,\ K = 42 \Rightarrow q_u = 0.833,\ q_d = 0.167)$

option transaction price
6

			51.45 9.45
		48.09 8.09	
	44.94 6.88		45.68 3.68
42 5.83		42.69 2.92	
	39.9 2.32		40.56 0
		37.91 0	
			36.01 0

stock price	from binomial model
option	option value
Delta	delta of option position
money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
profit	terminal profit

$= 51.45 - 42 = 9.45$

$$8.09 = \frac{1}{1.05}\left(0.833 \cdot 9.45 + 0.167 \cdot 3.68\right)$$

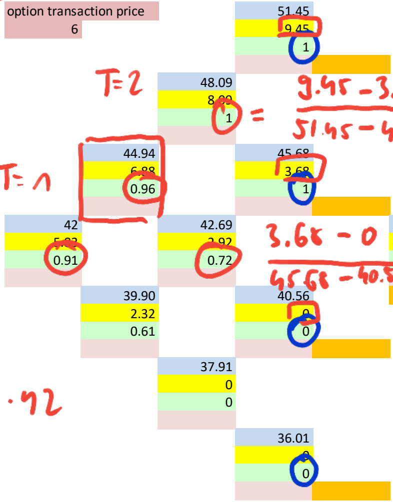
Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise und Δ im Binomialbaum

$(\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d})$

$\Delta = 1$, wenn Option ausgeübt wird in T

$\Delta = 0$, wenn die Option aus dem Geld ist in T



T=2

$= \frac{9.45 - 3.68}{51.45 - 45.68}$

T=1

$\frac{3.68 - 0}{45.68 - 40.56}$

$\Delta S = 0.91 \cdot 42$

stock price	from binomial model
option	option value
Delta	delta of option position
money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
profit	terminal profit

Dynamisches Hedging

- Position im Underlying: ΔS
- Position im Geldmarktkonto: $\boxed{B = C - \Delta S;}$
  falls $B > 0 \Rightarrow$ Geldanlage
  falls $B < 0 \Rightarrow$ Kreditaufnahme zur Finanzierung des Hedges
  - Kreditposition in $t = 0$:
    Leihe Geld um 0.91 Anteile zu je 42 zu kaufen
    $B_0 = \boxed{6} - 0.91 \cdot 42 = -32.02$
  - Kreditposition in $t = 1$, up-state:
    1. Kreditbetrag wächst um $r = 5\%$ Zinsen: $\underline{-32.02} \cdot 1.05 = \underline{-33.62}$
    2. Leihe Geld um $\underline{0.96 - 0.91} = 0.05$ Anteile zu je 44.94 zu kaufen, d.h. leihe zusätzliche 2.35
       $0.05 \cdot 44.94 = 2.35$
    3. neue Kreditposition: $-33.62 - 2.35 = \underline{-35.97}$
  - Gleiches Verfahren für alle weiteren Knoten

Aktienkurse, Optionspreise, Δ und Position im Geldmarktkonto B

($B = C - \Delta S$; falls $B > 0 \Rightarrow$ Geldanlage, falls $B < 0 \Rightarrow$ Kreditaufnahme)

uun

option transaction price
6

			51,45			
			9,45			
			1			
			-41,80	0.2		
		48,09				
		8,09				
		1				
		-39,81				
	44,94		45,68			
	6,88		3,68			
	0,96		1			
	-35,97		-41,80	0.2		
42		42,69			stock price	from binomial model
5,83		2,92			option	option value
0,91		0,72			Delta	delta of option position
-32,02		-27,57			money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
	39,9		40,56		profit	terminal profit
	2,32		0			
	0,61		0			
	-21,85		0,20	0.2		
		37,91				
		0				
		0				
		0,19				
			36,01			
			0			
			0			
			0,20	0.2		

$$\frac{0.2}{1.05^3} = 0{,}17$$

Dynamisches Hedging

- Berechnung des Profits in $T = 3$ in Zustand uuu
  - Kreditposition im Hedge-Portfolio: -41.80
  - Aktienposition im Hedge-Portfolio ($\Delta = 1$): $\underline{51.45}$ $\Delta \cdot S$
  - Optionspayoff (Option wird ausgeübt): -9.45
  - Gesamtposition: $-41.80 - 9.45 + 51.45 = \boxed{0.20}$
- Gleiches Verfahren für alle weiteren Knoten
  $\Rightarrow$ Risikofrei!
- Barwert: $0.20 \cdot (1.05)^{-3} = 0.17$
  $\Rightarrow$ Profit durch Verkauf der Option wurde vollständig gehedgt!

Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise, Δ, Position im Geldmarktkonto B und Profit in $T = 3$

option transaction price			51,45			
6			9,45			
			1			
			-41,80	0,20	profit	
		48,09				
		8,09			plus value of stock position in hedge portfolio	51,45
		1			plus terminal value of money mkt account	-41,80
		-39,81			minus option payoff	-9,45
	44,94		45,68			**0,20**
	6,88		3,68			
	0,96		1			
	-35,97		-41,80	0,20		
42		42,69			stock price	from binomial model
5,83		2,92			option	option value
0,91		0,72			Delta	delta of option position
-32,02		-27,57			money mkt	money borrowed (-) or invested (+)
	39,9		40,56		profit	terminal profit
	2,32		0			
	0,61		0			
	-21,85		0,20	0,20		
		37,91				
		0				
		0				
		0,19				
			36,01			
			0			
			0			
			0,20	0,20		