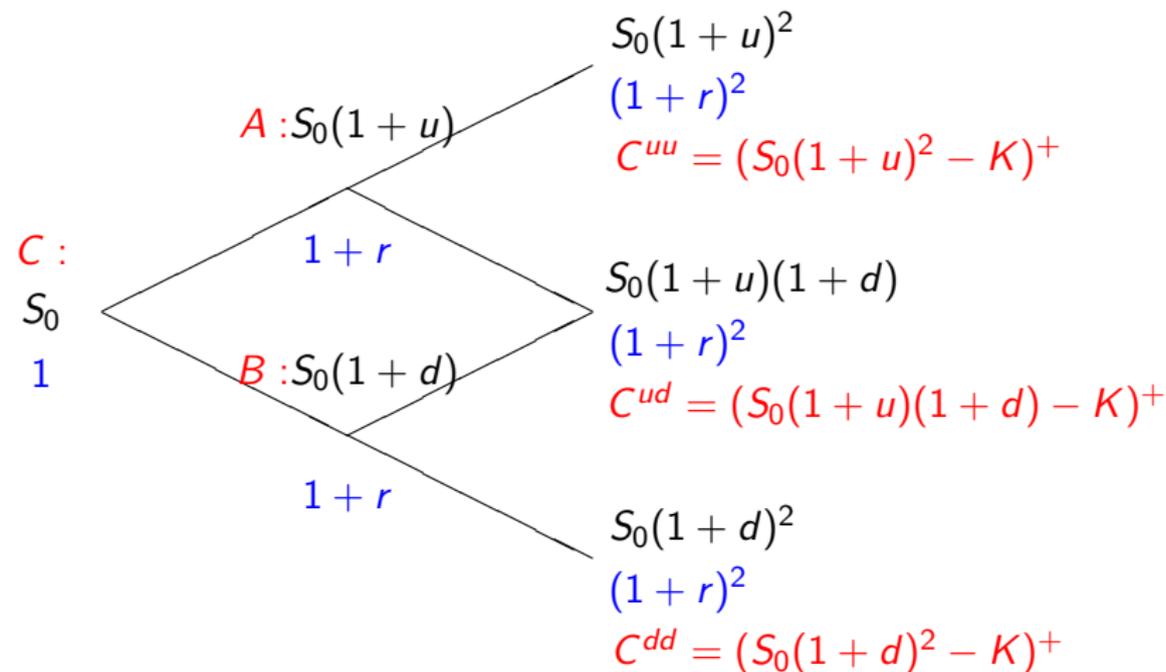


Teil III

Optionsbewertung in Binomialbäumen

- 10 **Zweiperiodenmodell**
- 11 Optionspreisformel im Binomialmodell
- 12 Exotische Optionen
- 13 Dynamisches Hedging

Zweiperiodenmodell



- Knoten A:

$$C^u = \frac{1}{1+r} [qC^{uu} + (1-q)C^{ud}]$$

- Knoten B:

$$C^d = \frac{1}{1+r} [qC^{ud} + (1-q)C^{dd}]$$

- Knoten C:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} [qC^u + (1-q)C^d]$$
$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{(1+r)^2} [q^2C^{uu} + 2q(1-q)C^{ud} + (1-q)^2C^{dd}]$$

- 10 Zweiperiodenmodell
- 11 Optionspreisformel im Binomialmodell**
- 12 Exotische Optionen
- 13 Dynamisches Hedging

Wdh.: Pascalsches Dreieck und Binomialkoeffizienten

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Verallgemeinere diese Formel auf ein Modell mit T Schritten:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=0}^T \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} C_T^{(i)}$$
$$C_T^{(i)} = (S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - K)^+$$

- Definiere a als die minimale Anzahl von Kursanstiegen, die nötig sind, so dass die Option im Geld endet:

$$S_T^{(a)} > K \quad \text{and} \quad S_T^{(a-1)} \leq K$$

- Daher:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^T \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} (S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - K)$$

die Formel in eine Differenz:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^T \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^T \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} \quad (2)$$

Schreibe die Discount-Faktoren und Wahrscheinlichkeiten um:

$$\begin{aligned} (1+r)^T &= (1+r)^i (1+r)^{T-i} \\ \frac{(1+u)^i q^i}{(1+r)^i} &= \left(\frac{(1+u)q}{1+r} \right)^i \\ &= \tilde{q}^i \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1+d)^{T-i} (1-q)^{T-i}}{(1+r)^{T-i}} &= \left(\frac{(1+d)(1-q)}{1+r} \right)^{T-i} \\ &= (1-\tilde{q})^{T-i} \end{aligned} \quad (4)$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Setze (3) und (4) in den ersten Teil von (2) ein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{i=a}^T \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} S_0 (1+u)^i (1+d)^{T-i} \\ = S_0 \sum_{i=a}^T \binom{T}{i} \tilde{q}^i (1-\tilde{q})^{T-i} \end{aligned}$$

- Binomialverteilung:

$$\sum_{i=a}^T \binom{T}{i} \tilde{q}^i (1-\tilde{q})^{T-i} \equiv B(T, \tilde{q}; a)$$

- Analog für den zweiten Term:

$$\sum_{i=a}^T \binom{T}{i} q^i (1-q)^{T-i} \equiv B(T, q; a)$$

Optionspreisformel im Binomialmodell

- Daraus ergibt sich:

$$C_0 = S_0 B(T, \tilde{q}; a) - \frac{K}{(1+r)^T} B(T, q; a)$$

- Interpretation: Die Terme $B(T, \tilde{q}; a)$ und $B(T, q; a)$ sind Wahrscheinlichkeiten
- Welche Art von Wahrscheinlichkeiten?

$$B(T, \tilde{q}; a) = \text{Prob}^{\tilde{\mathbb{Q}}}(S_T \geq K)$$

$$B(T, q; a) = \text{Prob}^{\mathbb{Q}}(S_T \geq K)$$

künstliche Wahrscheinlichkeiten, dass der Call im Geld endet

- Künstliche Wahrscheinlichkeiten bzgl. des jeweiligen Numeraires
 - $\tilde{\mathbb{Q}}$: Aktie
 - \mathbb{Q} : Geldmarktkonto

Analogie zum Black-Scholes Modell

- 10 Zweiperiodenmodell
- 11 Optionspreisformel im Binomialmodell
- 12 Exotische Optionen**
- 13 Dynamisches Hedging

Exotische Optionen (Auswahl)

- Asiatische Option

- Auszahlungsprofil hängt von der Differenz zwischen dem Strike-Preises und einem Mittelwert über vergangene Kurse des Underlyings ab.
- Call: $C_T = \left(\sum_{t=1}^T S_t - K \right)^+$, Put: $P_T = \left(K - \sum_{t=1}^T S_t \right)^+$

- Barriere-Option

- Option die durch Überschreiten oder Unterschreiten einer Barriere aktiviert (Knock-In-Option) oder deaktiviert (Knock-Out-Option)
- Digitale Barriere-Optionen zahlen am Laufzeitende einen Nominalbetrag aus, wenn der Kurs während der Laufzeit eine Schwelle passiert.

- Bermuda-Option

- Option mit mehreren Ausübungszeitpunkten, jedoch ist die Option nicht durchgängig zwischen Emission und Fälligkeit ausübbar.
- Der Name Bermuda-Option rührt daher, dass Bermuda zwischen Amerika und Europa liegt.

Exotische Optionen (Auswahl)

- Chooser-Option
 - Der Käufer muss zu einem definierten Zeitpunkt vor der Fälligkeit entscheiden, ob er seinen Chooser in eine Call-Option oder eine Put-Option umwandeln will.
- Exchange-Option
 - Option erlaubt am Ende der Laufzeit das Underlying gegen ein alternatives Produkt zu tauschen.
- Lookback-Option
 - Basispreis wird erst bei Ausübung festgelegt als der beste Preis, den der Basiswert während der Optionslaufzeit erreicht hat.
 - Im Fall einer Call-Option ist das der niedrigste Preis, bei einer Put-Option der höchste.
 - Bei Fälligkeit erhält der Käufer der Option die Differenz zwischen dem Marktpreis des Basiswertes zum Zeitpunkt der Fälligkeit und dem nun festgelegten Basispreis.

Bewertung pfadabhängiger Optionen

- Bei pfadabhängigen Optionen (z.B. Asiatisch, Lookback, Barriere) hängt das Auszahlungsprofil nicht nur vom Schlusskurs der Aktie ab, sondern auch von dem Weg, den der Kurs durch den Baum genommen hat.
- Einfache Bewertung in Binomialbäumen
 - 1 Stelle den Binomialbaum für das Underlying auf.
 - 2 Ermittle für jeden einzelnen Pfad i das Auszahlungsprofil C_i in T .
Wie viele Pfade gibt es? $\Rightarrow 2^T$.
 - 3 Bestimme für jeden einzelnen Pfad die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $q^{\ell_i}(1-q)^{T-\ell_i}$, wobei ℓ_i die Anzahl der up-Steps und $T-\ell_i$ die Anzahl der down-Steps in Pfad i ist.
 - 4 Bestimme den diskontierten Erwartungswert der Auszahlungen, d.h.

$$P = \sum_{i=1}^{2^T} \frac{q^{\ell_i}(1-q)^{T-\ell_i} C_i}{(1+r)^T}$$

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

Beispiel: Bewertung pfadabhängiger Optionen

- 10 Zweiperiodenmodell
- 11 Optionspreisformel im Binomialmodell
- 12 Exotische Optionen
- 13 Dynamisches Hedging**

- Betrachte ein Modell mit den folgenden Parametern: $S_0 = 42$, $u = 0.07$, $d = -0.05$, $r = 0.05$ (diskrete Verzinsung)
- Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten: $q_u = 0.833$, $q_d = 0.167$
- Betrachte Call-Option mit $T = 3$, Strike-Preis $K = 42$: $C_0 = 5.83$
- Annahme: Bank verkauft Call für 6 an einen Kunden
- Sofortiger Gewinn: $6 - 5.83 = 0.17$
- Aber: Option könnte im Geld enden und ausgeübt werden, wodurch der Gewinn verloren ginge.
- Wie lässt sich der Gewinn absichern? → Dynamisches Hedging!

- $\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$: Sensitivität des Optionspreises bzgl. des Preises des Underlyings
- Wir wissen vom Einperiodenmodell

$$C = \Delta S + B$$

daher

$$C - \Delta S = B$$

Option plus Δ Einheiten des Underlyings short ist risikofrei!

- Aber auch

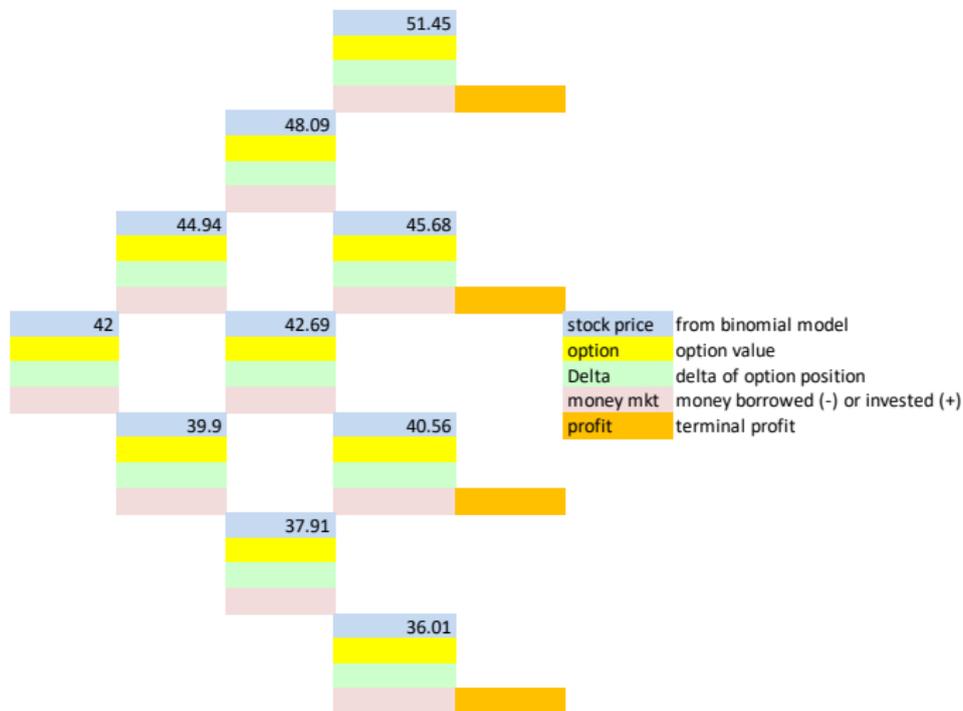
$$-C + \Delta S = -B,$$

Δ Einheiten des Underlyings plus eine Option short ist risikofrei.

Dynamisches Hedging

Aktienkurse im Binomialbaum

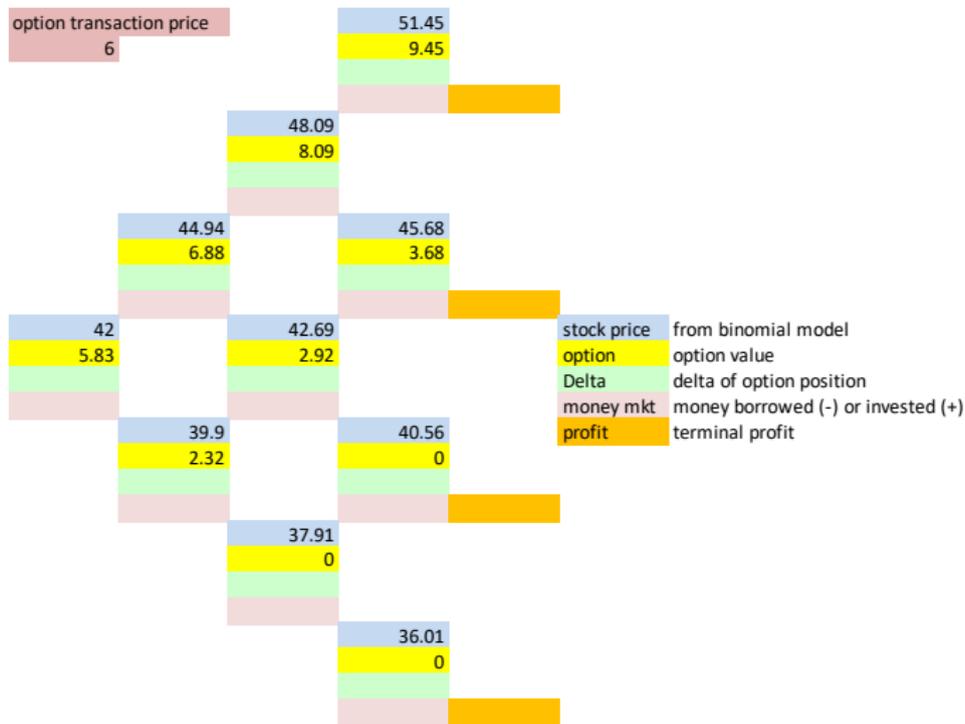
($S_0 = 42$, $u = 0.07$, $d = -0.05$)



Dynamisches Hedging

Aktienkurse und Optionspreis gemäß Formel im Binomialbaum

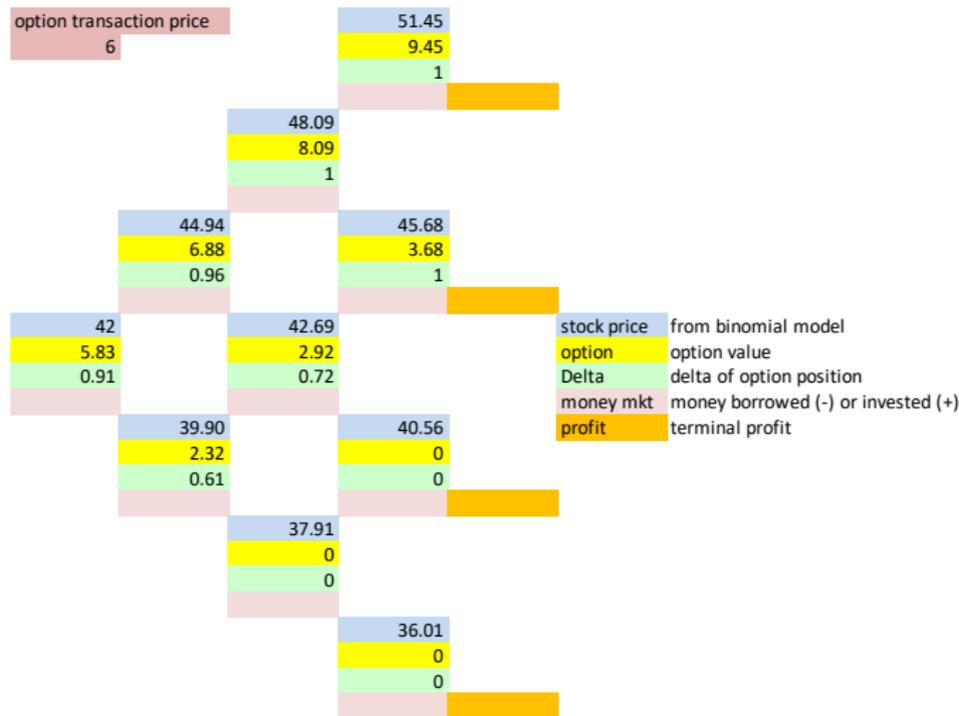
($S_0 = 42$, $u = 0.07$, $d = -0.05$, $r = 0.05$, $T = 3$, $K = 42 \Rightarrow q_u = 0.833$, $q_d = 0.167$)



Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise und Δ im Binomialbaum

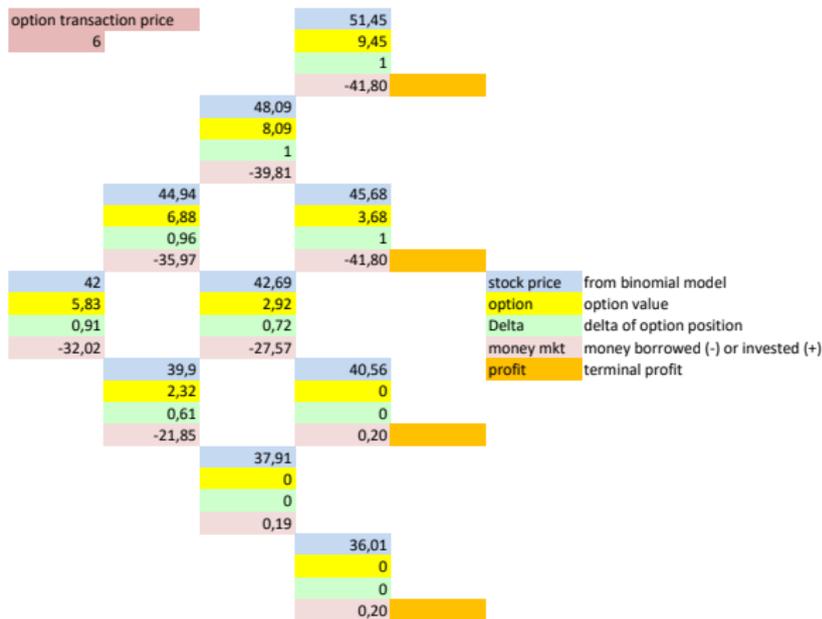
$$\Delta = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$$



- Position im Underlying: ΔS
- Position im Geldmarktkonto: $B = C - \Delta S$;
falls $B > 0 \Rightarrow$ Geldanlage
falls $B < 0 \Rightarrow$ Kreditaufnahme zur Finanzierung des Hedges
 - Kreditposition in $t = 0$:
Leihe Geld um 0.91 Anteile zu je 42 zu kaufen
 $B_0 = 6 - 0.91 \cdot 42 = -32.02$
 - Kreditposition in $t = 1$, up-state:
 - 1 Kreditbetrag wächst um $r = 5\%$ Zinsen: $-32.02 \cdot 1.05 = -33.62$
 - 2 Leihe Geld um $0.96 - 0.91 = 0.05$ Anteile zu je 44.94 zu kaufen, d.h. leihe zusätzliche 2.35
 - 3 neue Kreditposition: $-33.62 - 2.35 = -35.97$
 - Gleiches Verfahren für alle weiteren Knoten

Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise, Δ und Position im Geldmarktkonto B
 ($B = C - \Delta S$; falls $B > 0 \Rightarrow$ Geldanlage, falls $B < 0 \Rightarrow$ Kreditaufnahme)



- Berechnung des Profits in $T = 3$ in Zustand uuu
 - Kreditposition im Hedge-Portfolio: -41.80
 - Aktienposition im Hedge-Portfolio ($\Delta = 1$): 51.45
 - Optionspayoff (Option wird ausgeübt): -9.45
 - Gesamtposition: $-41.80 - 9.45 + 51.45 = 0.20$
- Gleiches Verfahren für alle weiteren Knoten
⇒ Risikofrei!
- Barwert: $0.20 \cdot (1.05)^{-3} = 0.17$
⇒ Profit durch Verkauf der Option wurde vollständig gehedgt!

Dynamisches Hedging

Aktienkurse, Optionspreise, Δ , Position im Geldmarktkonto B und Profit in $T = 3$

