

## Teil II

# Optionsbewertung im Einperiodenmodell

- 7 Einperiodenmodell
- 8 Geschlossene Lösungen für Aktie und Geldmarktkonto
- 9 Allgemeine Lösung zum Einperiodenmodell

# Einperiodenmodell

- Zwei Zeitpunkte  $t \in \{0, 1\} \Rightarrow$  eine Periode
- In  $t = 1$  können  $S$  verschiedene Zustände eintreten
- Es werden  $N$  Wertpapiere (Aktien, Geldmarktkonto) gehandelt, dargestellt durch Payoff-Matrix  $X$ :



$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{S,1} & \cdots & x_{S,N} \end{pmatrix}$$

$x_{s,n}$ : Payoff von Wertpapier  $n$  in Zustand  $s$  in  $t = 1$

- $S = 2$ : Binomialmodell,  $\longrightarrow$  Black-Scholes Modell
- $S = 3$ : Trinomialmodell

- Preise der Wertpapiere in  $t = 0$  als Preisvektor

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

$p_n$ : Preis des Wertpapiers  $n$  in  $t=0$

- Problem: Finde den Preis  $p_{N+1}$  eines Derivates, das durch folgenden Payoff-Vektor dargestellt ist:

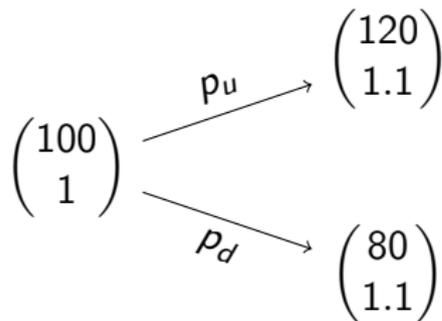
$$x_{S,N+1} = (x_{S,N} - K)^+ \quad x_{N+1} = \begin{pmatrix} x_{1,N+1} \\ \vdots \\ x_{S,N+1} \end{pmatrix}$$

Call-Option auf Papier  $N$

$x_{S,N+1}$   
Auszahlung des Derivates  
in  $t=1$  in  
Zustand  $S$

# Einführendes Beispiel

- Beispiel für Modell mit  $N = 2$  Wertpapieren (Aktie und Geldmarktkonto, risikoloser Zins = 10%) und  $S = 2$  Zuständen (*up* und *down*):



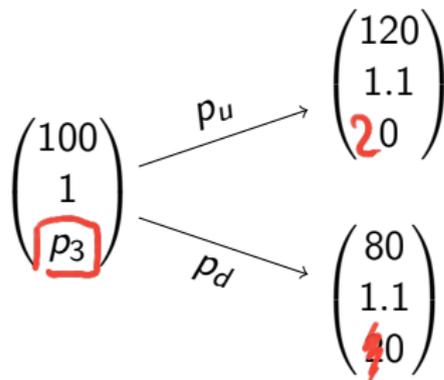
- Daraus folgt:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- Preis einer Call-Option auf die Aktie mit Strike-Preis  $K = 100$ ?

# Einführendes Beispiel

- Payoff-Vektor der Call Option:  $x_3 = \begin{pmatrix} (120 - 100)^+ \\ (80 - 100)^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$  ✓



- Idee: Konstruiere ein Portfolio, das den Payoff-Vektor  $x_3$  der Call-Option repliziert.
- Gemäß dem LOP muss das Portfolio den gleichen Preis wie das Derivat haben.

# Einführendes Beispiel

- Betrachte folgendes Portfolio in  $t = 0$ :

0.5 Einheiten der Aktie; -36.36 Einheiten der risikofreien Anlage  
(Kreditaufnahme!)

- Wert des Portfolios in  $t = 0$ :

$$0.5 \cdot 100 - 36.36 \cdot 1 = 13.64$$

- Payoff des Portfolios in  $t = 1$ :

- Zustand  $s = 1$ :

$$0.5 \cdot 120 - 36.36 \cdot 1.1 = 20 \quad \checkmark$$

- Zustand  $s = 2$ :

$$0.5 \cdot 80 - 36.36 \cdot 1.1 = 0 \quad \checkmark$$

- Dieses Portfolio repliziert den Payoff-Vektor  $x_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$  der Call-Option.

- Schlussfolgerung: Gemäß LOP  $p_3 = 13.64$

Was würden Sie tun, wenn  $p_3 > 13.64$ , was wenn  $p_3 < 13.64$ ?

Ok! Aber wie konstruiert man das *Replikationsportfolio*?

## Replikationsportfolio

Gegeben sei eine Payoff-Matrix  $X$  von zugrundeliegenden Wertpapieren mit Preisen  $p$  und der Payoff-Vektor  $x_{N+1}$  eines Derivates.

- 1 Das Replikationsportfolio  $\varphi$  löst das lineare Gleichungssystem

$$X\varphi = x_{N+1}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$$

$\varphi_n$  gibt die Anteile von Papier  $n$  im Portfolio an.

- 2 Der arbitragefreie Preis des Derivates ist gemäß dem LOP

$$p_{N+1} = p^T \varphi = p \cdot \varphi$$

# Einführendes Beispiel

- ① Replikationsportfolio:  $X$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix}}_X \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}}_\varphi = \underbrace{\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_3}$$

$$40\varphi_1 = 20$$
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = X^{-1} X_3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ -36.36 \end{pmatrix}$$

- ② Arbitragefreier Preis des Derivates:

$$\begin{aligned} p_3 &= p^\top \varphi = p \cdot \varphi \\ &= 100 \cdot 0.50 + 1 \cdot (-36.36) \\ &= 13.64 \end{aligned}$$

Wann existiert ein Replikationsportfolio?

## Vollständigkeit

Ein Einperiodenmodell ist vollständig, falls für jeden Payoff  $x_{N+1}$  ein Replikationsportfolio existiert.

- Vollständigkeit bedeutet, dass jedes Derivat aus gehandelten Wertpapieren repliziert werden kann.
- Man nennt eine solche Portfoliostrategie einen *Hedge* für das Derivat.

## Kriterium für Vollständigkeit

Ein Einperiodenmodell ist vollständig genau dann wenn die Payoff-Matrix vollen Rang hat

$$rk(X) = S,$$

# Beispiel zur Vollständigkeit

a)  $X = \begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix}$

$S = 2$   
 $\text{rk}(X) = 2 \rightarrow$  vollständig

i. A. Binomialmodelle mit 2 Wertpapieren vollständig, sofern deren Auszahlungen keine perfekten Vielfache voneinander sind

b)  $X = \begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 100 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix}$

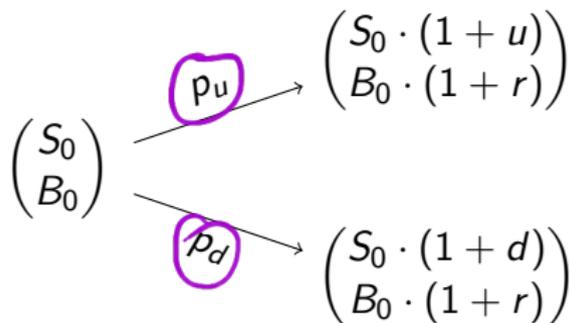
$\text{rk}(X) = 2 < 3 = S$

$\hookrightarrow$  Trinomialmodell ist unvollständig

c) Allgemein: Vollständig, falls Anzahl der linear unabh. Wertpapiere gleich der Anzahl der Zustände  $S$

- 7 Einperiodenmodell
- 8 Geschlossene Lösungen für Aktie und Geldmarktkonto**
- 9 Allgemeine Lösung zum Einperiodenmodell

- Betrachte ein allgemeines Einperiodenmodell mit Aktie und Geldmarktkonto:



- Setze  $B_0 = 1$ . Daraus ergibt sich:

$$X = \begin{pmatrix} S_0 \cdot (1 + u) & 1 + r \\ S_0 \cdot (1 + d) & 1 + r \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} S_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{u > r > d}$$

- Bestimme den Preis  $C_0$  eines Derivates mit Profil

$$C = \begin{pmatrix} C^u \\ C^d \end{pmatrix}.$$

# Replikation

- ① Replikationsansatz:  $X \cdot \varphi = C$

$$\begin{pmatrix} S_0 \cdot (1+u) & 1+r \\ S_0 \cdot (1+d) & 1+r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^u \\ C^d \end{pmatrix}$$

Anzahl der Aktien:  $\varphi_1 = \frac{C^u - C^d}{S_0(u-d)}$

Risikofreie Anlage:  $\varphi_2 = \frac{1}{1+r} \left[ C^d - \frac{(1+d)(C^u - C^d)}{u-d} \right]$

- ② Wert des Replikationsportfolios und LOP

$$\begin{aligned} C_0 &= \varphi_1 \cdot S_0 + \varphi_2 \cdot 1 \\ &= \frac{C^u - C^d}{S_0(u-d)} S_0 + \frac{1}{1+r} \left[ C^d - \frac{(1+d)(C^u - C^d)}{u-d} \right] \cdot 1 \\ &= \boxed{C^u} \frac{r-d}{(1+r)(u-d)} + \boxed{C^d} \frac{u-r}{(1+r)(u-d)} \end{aligned}$$

# Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

- Daraus folgt:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left[ C^u \underbrace{\frac{r-d}{u-d}}_{=q_u} + C^d \underbrace{\frac{u-r}{u-d}}_{=q_d} \right] \quad (1)$$

$$q_u + q_d = \frac{r-d}{u-d} + \frac{u-r}{u-d} = \frac{\cancel{r-d} + u - \cancel{r}}{u-d} = \frac{u-d}{u-d} = 1$$

$$q_u + q_d = 1$$

$$q_u = \frac{r-d}{u-d} > 0, \text{ weil } u > r > d$$

$$q_d > 0 \quad q = q_u = \frac{r-d}{u-d}$$

$$1 - q = q_d$$

# Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

- Daraus folgt:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left[ C^u \underbrace{q}_{q} + C^d \underbrace{(1-q)}_{1-q} \right] \quad (1)$$

- Künstliche (*risikoneutrale*) Wahrscheinlichkeiten:  $q > 0, 1 - q > 0$
- Diese unterscheiden sich von den realen Wahrscheinlichkeiten  $p_u, p_d$ 
  - Reale Wahrscheinlichkeiten werden aus dem historischen Verlauf geschätzt
  - Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten werden aus Optionspreisen berechnet
- Existenz von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten  $\Leftrightarrow$  Arbitragefreiheit

- Hier:

$$q > 0, 1 - q > 0$$
$$u > r > d \Leftrightarrow \text{Arbitragefreiheit}$$

- Falls nicht ...

- $u > d > r$  (Arbitragestrategie?)
- $r > u > d$  (Arbitragestrategie?)

# Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten und Arbitragefreiheit

1)  $u > d > r$       Bsp.

$u = 0.4, d = 0.2, r = 0.1$        $\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$        $\begin{pmatrix} 140 \\ 1.1 \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} 120 \\ 1.1 \end{pmatrix}$

$q = \frac{r-d}{u-d} < 0 \quad \downarrow$  keine risikoneutrale WS.

$t=0$ : Kaufe 1 Aktie und finanzieren sie durch eine Kreditaufnahme  $\rightarrow$  zero-net investiert

$t=1$ : Verkauf unsere Aktie:  $> S_0(1+d)$   
Zahl Kredit zurück:  $- S_0(1+r)$   
 $\frac{S_0(d-r)}{S_0(d-r)} > 0$

2)  $r > u > d$

$q = \frac{r-d}{u-d} > \frac{u-d}{u-d} = 1 \quad \downarrow$  keine risikoneutrale WS

# Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

- Drücke den Preis des Derivates (1) mit Hilfe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten aus:

$$\begin{aligned} \triangleright C_0 &= \frac{1}{1+r} \cdot \overbrace{[qC^u + (1-q)C^d]}^{E^{\mathbb{Q}}[C_1]} \\ \Rightarrow \underbrace{C_0}_{B_0} &= q \underbrace{\frac{C^u}{1+r}}_{B_1} + (1-q) \underbrace{\frac{C^d}{1+r}}_{B_1} \end{aligned}$$

- 1: Preis der risikofreien Anlage in  $t = 0$
  - $1 + r$ : Preis der risikofreien Anlage in  $t = 1$  in beiden Zuständen  $u, d$
  - Numeraire: Geldmarktkonto = risikofreien Anlage
- Als Erwartungswert:

$$C_0 = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C_1}{1+r} \right]$$

oder auch

$$\frac{C_0}{B_0} = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{C_1}{B_1} \right]$$

# Alternativ: Aktie als Numeraire

- Wir werden später sehen, dass es durchaus nützlich sein kann die Aktie als Numeraire zu verwenden:

$$\triangleright \frac{C_0}{S_0} = q \frac{C^u}{(1+r)S_0} + (1-q) \frac{C^d}{(1+r)S_0}$$

- $S_0 = \frac{S^u}{(1+u)} = \frac{S^d}{(1+d)}$

- Damit gilt:

$$\frac{C_0}{S_0} = \frac{\tilde{q}(1+u)}{1+r} \frac{C^u}{S^u} + \frac{(1-\tilde{q})(1+d)}{1+r} \frac{C^d}{S^d}$$

- Definiere die künstliche Wahrscheinlichkeit  $\tilde{q} = \frac{q(1+u)}{1+r}$ .
  - $\frac{(1-q)(1+d)}{1+r} = 1 - \tilde{q}$ , da  $q(1+u) + (1-q)(1+d) = 1+r$
  - $0 < q < 1 \Leftrightarrow 0 < \tilde{q} < 1$
- $\tilde{q}, 1 - \tilde{q}$  künstliche Wahrscheinlichkeiten für Aktie als Numeraire.

# Alternativ: Aktie als Numeraire

- Nun lässt sich die Option mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten bewerten:

$$\begin{aligned} C_0/S_0 &= \tilde{q} \frac{C^u}{S^u} + (1-\tilde{q}) \frac{C^d}{S^d} \\ \frac{C_0}{S_0} &= \tilde{q} \frac{C^u}{S_0(1+u)} + (1-\tilde{q}) \frac{C^d}{S_0(1+d)} \\ \Rightarrow \frac{C_0}{S_0} &= E^{\tilde{Q}} \left[ \frac{C_1}{S_1} \right] \\ \Rightarrow C_0 &= S_0 E^{\tilde{Q}} \left[ \frac{C_1}{S_1} \right] \end{aligned}$$

- Alternative Notation mit normalisierten Preisen und Payoffs ( $\tilde{C}_0 = C_0/S_0$ ,  $\tilde{C}_1 = C_1/S_1$ ):

$$\tilde{C}_0 = E^{\tilde{Q}}[\tilde{C}_1]$$

# Beispiel: Künstliche Wahrscheinlichkeiten

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} r = 10\% \\ u = 20\% \\ d = -20\% \end{array} \quad \begin{array}{l} S_0 = 100, K = 100 \\ B_0 = 1 \end{array}$$

$$q = \frac{r - d}{u - d} = \frac{10\% - (-20\%)}{20\% - (-20\%)} = \frac{30\%}{40\%} = 0.75, 1 - q = 25\%$$

$$\tilde{q} = q \frac{1+u}{1+r} = 0.75 \cdot \frac{1.2}{1.1} = 81.81\%, 1 - \tilde{q} = 18.18\%$$

Replikationswert  $\rightarrow C_0 = 13.64$  (s. 66)

$$\hookrightarrow C_0 = \frac{1}{1+r} [q C^u + (1-q) C^d] = \frac{1}{1.1} [0.75 \cdot 20 + 0.25 \cdot 0] = 13.64$$

$$\hookrightarrow \frac{C_0}{S_0} = \tilde{q} \cdot \frac{C^u}{S^u} + (1 - \tilde{q}) \cdot \frac{C^d}{S^d} = 0.8181 \cdot \frac{20}{120} + 0.1818 \cdot \frac{0}{80} = 0.1364$$

- 7 Einperiodenmodell
- 8 Geschlossene Lösungen für Aktie und Geldmarktkonto
- 9 Allgemeine Lösung zum Einperiodenmodell

- Wertpapiere  $n = 1, \dots, N$ , Zustände  $s = 1, \dots, S$

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{S,1} & \cdots & x_{S,N} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

- Normalisierte Auszahlungsmatrix  $X^*$  mit Asset  $n^*$  als Numeraire:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{1,1}/x_{1,n^*} & \cdots & x_{1,n^*}/x_{1,n^*} & \cdots & x_{1,N}/x_{1,n^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{S,1}/x_{S,n^*} & \cdots & x_{S,n^*}/x_{S,n^*} & \cdots & x_{S,N}/x_{S,n^*} \end{pmatrix}$$

- Normalisierter Preisvektor  $p^*$ :

$$p^* = \begin{pmatrix} p_1/p_{n^*} \\ \vdots \\ p_{n^*}/p_{n^*} \\ \vdots \\ p_N/p_{n^*} \end{pmatrix}$$

- Bewertung von Papier  $i$  mit Vektor von künstlichen Wahrscheinlichkeiten  $Q^* = (q_s^*)_{s=1,\dots,S}$ :

$$\frac{p_i}{p_{n^*}} = \sum_{s=1}^S q_s^* \frac{X_{s,i}}{X_{s,n^*}} \iff p_i^* = \mathbb{E}^{Q^*} [X_i^*]$$

$\mathbb{E}^{Q^*} [X_i^*]$

- Matrix-Vektor-Notation:

$$\underbrace{p^*}_{N \times 1} = \underbrace{(X^*)'}_{N \times S} \underbrace{Q^*}_{S \times 1} \iff Q^* = [(X^*)']^{-1} p^*$$

- Löse nach  $Q^*$  auf um festzustellen, ob der Markt vollständig und arbitragefrei ist

Was, wenn  $Q^*$  existiert aber nicht eindeutig ist?

→ Markt unvollständig

Was, wenn  $Q^*$  negative Werte enthält?

→ Markt nicht arbitragefrei

- Nutze  $Q^*$  um das Derivat zu bewerten

- Arbitragefreiheit: Preis des Derivates ist ebenfalls arbitragefrei.
- Vollständigkeit: Preis des Derivates ist eindeutig.