Teil II

Optionsbewertung im Einperiodenmodell

Inhaltsverzeichnis

Einperiodenmodell

- Zwei Zeitpunkte $t \in \{0, 1\} \Rightarrow$ eine Periode
- In $t = 1$ können S verschiedene Zustände eintreten
- Es werden N Wertpapiere (Aktien, Geldmarktkonto) gehandelt, dargestellt durch Payoff-Matrix X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{S,1} & \cdots & x_{S,N} \end{pmatrix}$$

  $x_{s,n}$: Payoff von Wertpapier n in Zustand s in $t = 1$
- $S = 2$: Binomialmodell,
  $S = 3$: Trinomialmodell

Einperiodenmodell

- Preise der Wertpapiere in $t = 0$ als Preisvektor

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

- Problem: Finde den Preis p_{N+1} eines Derivates, das durch folgenden Payoff-Vektor dargestellt ist:

$$x_{N+1} = \begin{pmatrix} x_{1,N+1} \\ \vdots \\ x_{S,N+1} \end{pmatrix}$$

Einführendes Beispiel

- Beispiel für Modell mit $N = 2$ Wertpapieren (Aktie und Geldmarktkonto, risikoloser Zins $= 10\%$) und $S = 2$ Zuständen (*up* und *down*):

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} 120 \\ 1.1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \arrow[ur, "p_u"] \arrow[dr, "p_d"'] & \\
 & \begin{pmatrix} 80 \\ 1.1 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

- Daraus folgt:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- Preis einer Call-Option auf die Aktie mit Strike-Preis $K = 100$?

Einführendes Beispiel

- Payoff-Vektor der Call Option: $x_3 = \begin{pmatrix} (120-100)^+ \\ (80-100)^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} 120 \\ 1.1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ p_3 \end{pmatrix} \arrow[ur, "p_u"] \arrow[dr, "p_d"'] & \\
 & \begin{pmatrix} 80 \\ 1.1 \\ 20 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

- Idee: Konstruiere ein Portfolio, das den Payoff-Vektor x_3 der Call-Option repliziert.
- Gemäß dem LOP muss das Portfolio den gleichen Preis wie das Derivat haben.

Einführendes Beispiel

- Betrachte folgendes Portfolio in $t = 0$:
  0.5 Einheiten der Aktie; -36.36 Einheiten der risikofreien Anlage (Kreditaufnahme!)
- Wert des Portfolios in $t = 0$:

$$0.5 \cdot 100 - 36.36 \cdot 1 = 13.64$$

- Payoff des Portfolios in $t = 1$:
  - Zustand $s = 1$:

$$0.5 \cdot 120 - 36.36 \cdot 1.1 = 20$$

  - Zustand $s = 2$:

$$0.5 \cdot 80 - 36.36 \cdot 1.1 = 0$$

- Dieses Portfolio repliziert den Payoff-Vektor $x_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Call-Option.
- Schlussfolgerung: Gemäß LOP $p_3 = 13.64$
  Was würden Sie tun, wenn $p_3 > 13.64$, was wenn $p_3 < 13.64$?

Replikationsansatz

Ok! Aber wie konstruiert man das *Replikationsportfolio*?

Replikationsportfolio

Gegeben sei eine Payoff-Matrix X von zugrundeliegenden Wertpapieren mit Preisen p und der Payoff-Vektor x_{N+1} eines Derivates.

1. Das Replikationsportfolio φ löst das lineare Gleichungssystem

$$X\varphi = x_{N+1}$$

   φ_n gibt die Anteile von Papier n im Portfolio an.

2. Der arbitragefreie Preis des Derivates ist gemäß dem LOP

$$p_{N+1} = p^\top \varphi$$

Einführendes Beispiel

1. Replikationsportfolio:

$$\begin{pmatrix} 120 & 1.1 \\ 80 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ -36.36 \end{pmatrix}$$

2. Arbitragefreier Preis des Derivates:

$$\begin{aligned} p_3 &= p^\top \varphi \\ &= 100 \cdot 0.50 + 1 \cdot (-36.36) \\ &= 13.64 \end{aligned}$$

Einführendes Beispiel

Wann existiert ein Replikationsportfolio?

Vollständigkeit

Ein Einperiodenmodell ist vollständig, falls für jeden Payoff x_{N+1} ein Replikationsportfolio existiert.

- Vollständigkeit bedeutet, dass jedes Derivat aus gehandelten Wertpapieren repliziert werden kann.
- Man nennt eine solche Portfoliostrategie einen *Hedge* für das Derivat.

Kriterium für Vollständigkeit

Ein Einperiodenmodell ist vollständig genau dann wenn die Payoff-Matrix vollen Rang hat

$$rk(X) = S,$$

Beispiel zur Vollständigkeit

Inhaltsverzeichnis

Modell

- Betrachte ein allgemeines Einperiodenmodell mit Aktie und Geldmarktkonto:

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{p_u} \begin{pmatrix} S_0 \cdot (1+u) \\ B_0 \cdot (1+r) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} S_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{p_d} \begin{pmatrix} S_0 \cdot (1+d) \\ B_0 \cdot (1+r) \end{pmatrix}$$

- Setze $B_0 = 1$. Daraus ergibt sich:

$$X = \begin{pmatrix} S_0 \cdot (1+u) & 1+r \\ S_0 \cdot (1+d) & 1+r \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} S_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u > r > d$$

- Bestimme den Preis C_0 eines Derivates mit Profil

$$C = \begin{pmatrix} C^u \\ C^d \end{pmatrix}.$$

Replikation

1. Replikationsansatz: $X \cdot \varphi = C$

$$\begin{pmatrix} S_0 \cdot (1+u) & 1+r \\ S_0 \cdot (1+d) & 1+r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^u \\ C^d \end{pmatrix}$$

Anzahl der Aktien: $\varphi_1 = \dfrac{C^u - C^d}{S_0(u-d)}$,

Risikofreie Anlage: $\varphi_2 = \dfrac{1}{1+r}\left[C^d - \dfrac{(1+d)(C^u - C^d)}{u-d}\right]$

2. Wert des Replikationsportfolios und LOP

$$\begin{aligned} C_0 &= \varphi_1 \cdot S_0 + \varphi_2 \cdot 1 \\ &= \frac{C^u - C^d}{S_0(u-d)} S_0 + \frac{1}{1+r}\left[C^d - \frac{(1+d)(C^u - C^d)}{u-d}\right] \cdot 1 \\ &= C^u \frac{r-d}{(1+r)(u-d)} + C^d \frac{u-r)}{(1+r)(u-d)} \end{aligned}$$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

- Daraus folgt:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left[C^u \frac{r-d}{u-d} + C^d \frac{u-r}{u-d} \right] \tag{1}$$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

- Daraus folgt:

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left[C^u \frac{r-d}{u-d} + C^d \frac{u-r}{u-d} \right] \qquad (1)$$

- Künstliche (*risikoneutrale*) Wahrscheinlichkeiten: $q > 0$, $1 - q > 0$
- Diese unterscheiden sich von den realen Wahrscheinlichkeiten p_u, p_d
  - Reale Wahrscheinlichkeiten werden aus dem historischen Verlauf geschätzt
  - Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten werden aus Optionspreisen berechnet
- Existenz von risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $\Rightarrow$ Arbitragefreiheit
- Hier:

$$u > r > d \quad \Rightarrow \quad \text{Arbitragefreiheit}$$

- Falls nicht ...
  - $u > d > r$ (Arbitragestrategie?)
  - $r > u > d$ (Arbitragestrategie?)

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten und Arbitragefreiheit

- Drücke den Preis des Derivates (1) mit Hilfe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten aus:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1+r} \cdot [qC^u + (1-q)C^d] \\
\Rightarrow \frac{C_0}{1} &= q\frac{C^u}{1+r} + (1-q)\frac{C^d}{1+r}
\end{aligned}
$$

  - 1: Preis der risikofreien Anlage in $t = 0$
  - $1 + r$: Preis der risikofreien Anlage in $t = 1$ in beiden Zuständen u, d
  - Numeraire: Geldmarktkonto = risikofreien Anlage
- Als Erwartungswert:

$$C_0 = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{1+r}\right]$$

oder auch

$$\frac{C_0}{B_0} = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_1}{B_1}\right]$$

Alternativ: Aktie als Numeraire

- Wir werden später sehen, dass es durchaus nützlich sein kann die Aktie als Numeraire zu verwenden:

$$\frac{C_0}{S_0} = q\frac{C^u}{(1+r)S_0} + (1-q)\frac{C^d}{(1+r)S_0}$$

- $S_0 = \frac{S^u}{(1+u)} = \frac{S^d}{(1+d)}$
- Damit gilt:

$$\frac{C_0}{S_0} = \frac{q(1+u)}{1+r}\frac{C^u}{S^u} + \frac{(1-q)(1+d)}{1+r}\frac{C^d}{S^d}$$

- Definiere die künstliche Wahrscheinlichkeit $\tilde{q} = \frac{q(1+u)}{1+r}$.
    - $\frac{(1-q)(1+d)}{1+r} = 1 - \tilde{q}$, da $q(1+u) + (1-q)(1+d) = 1+r$
    - $0 < q < 1 \Leftrightarrow 0 < \tilde{q} < 1$
- $\tilde{q}, 1 - \tilde{q}$ künstliche Wahrscheinlichkeiten für Aktie als Numeraire.

Alternativ: Aktie als Numeraire

- Nun lässt sich die Option mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten bewerten:

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{S_0} &= \tilde{q}\frac{C^u}{S_0 \cdot u} + (1-\tilde{q})\frac{C^d}{S_0 \cdot d} \\ \Rightarrow \frac{C_0}{\color{blue}{S_0}} &= E^{\widetilde{\mathbb{Q}}}\left[\frac{C_1}{\color{blue}{S_1}}\right] \\ \Rightarrow C_0 &= S_0 E^{\widetilde{\mathbb{Q}}}\left[\frac{C_1}{S_1}\right] \end{aligned}$$

- Alternative Notation mit normalisierten Preisen und Payoffs ($\widetilde{C}_0 = C_0/S_0$, $\widetilde{C}_1 = C_1/S_1$):

$$\widetilde{C}_0 = E^{\widetilde{\mathbb{Q}}}\left[\widetilde{C}_1\right]$$

Beispiel: Künstliche Wahrscheinlichkeiten

Inhaltsverzeichnis

Setup

- Wertpapiere $n = 1, \ldots, N$, Zustände $s = 1 \ldots, S$

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{S,1} & \cdots & x_{S,N} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$$

- Normalisierte Auszahlungsmatrix X^* mit Asset n^* als Numeraire:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{1,1}/x_{1,n^*} & \cdots & x_{1,n^*}/x_{1,n^*} & \cdots & x_{1,N}/x_{1,n^*} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{S,1}/x_{S,n^*} & \cdots & x_{S,n^*}/x_{S,n^*} & \cdots & x_{S,N}/x_{S,n^*} \end{pmatrix}$$

Setup

- Normalisierter Preisvektor p^*:

$$p^* = \begin{pmatrix} p_1 / p_{n^*} \\ \vdots \\ p_{n^*} / p_{n^*} \\ \vdots \\ p_N / p_{n^*} \end{pmatrix}$$

- Bewertung von Papier i mit Vektor von künstlichen Wahrscheinlichkeiten $Q^* = (q_s^*)_{s=1\dots,S}$:

$$\frac{p_i}{p_{n^*}} = \sum_{s=1}^{S} q_s^* \frac{x_{s,i}}{x_{s,n^*}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_i^* = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[X_i^*\right]$$

Bewertung

- Matrix-Vektor-Notation:

$$\underbrace{p^*}_{N\times 1} = \underbrace{(X^*)'}_{N\times S}\underbrace{Q^*}_{S\times 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q^* = [(X^*)']^{-1}p^*$$

- Löse nach Q^* auf um festzustellen, ob der Markt vollständig und arbitragefrei ist
  Was, wenn Q^* existiert aber nicht eindeutig ist?

  Was, wenn Q^* negative Werte enthält?
- Nutze Q^* um das Derivat zu bewerten
  - Arbitragefreiheit: Preis des Derivates ist ebenfalls arbitragefrei.
  - Vollständigkeit: Preis des Derivates ist eindeutig.